
Apuntes de Interferencia y difracción

J.M. Cabrera y F.J. López

Departamento de Física de Materiales
Universidad Autónoma de Madrid



Indice

1	Principios generales de las interferencias	1
1.1	Introducción	1
1.2	Interferencia de dos ondas estrictamente monocromáticas	3
1.2.1	El término de interferencia	3
1.2.2	Influencia de la polarización de la luz	5
1.2.3	Aproximación escalar	5
1.2.4	Visibilidad de las franjas	7
1.2.5	Dos ondas esféricas	7
1.2.6	Dos ondas planas	8
1.3	Experimento de Young	10
1.3.1	Uso de fuentes de luz reales	10
1.3.2	Posición de las franjas en la pantalla	11
1.3.3	Uso de lentes en el dispositivo de Young	13
1.3.4	Dispositivos similares	14
1.3.5	Experimento de Young y dualidad onda-partícula	16
1.4	Franjas con luz no monocromática	17
1.5	Coherencia temporal y visibilidad de las franjas	18
1.6	Fuentes extensas: coherencia espacial	22
1.6.1	Uso de rendijas	23
1.6.2	Anchura de las rendijas y visibilidad	24
1.6.3	Cálculo de la visibilidad	25
1.6.4	Coherencia espacial	26
1.6.5	Interferómetro estelar de Michelson	27
1.7	Comentarios finales	29
1.8	Apéndices	29
1.8.1	Análisis del experimento de Young con luz cuasimonocromática	29
1.8.2	Teorema de Van Cittert-Zernike	32
2	Interferencias por reflexiones en láminas	33
2.1	Interferencia de dos rayos en láminas de caras plano-paralelas	33
2.1.1	Obtención de rayos coherentes por división de amplitud	33

2.1.2	Cálculo de la diferencia de fase	34
2.1.3	Anillos de igual inclinación	35
2.1.4	Aplicación	37
2.1.5	Anillos con luz transmitida	38
2.2	Franjas en películas delgadas	39
2.2.1	Láminas de espesor variable	39
2.2.2	Franjas de igual espesor	40
2.2.3	Aplicación	41
2.2.4	Anillos de Newton	42
2.3	El interferómetro de Michelson	44
2.3.1	Descripción	44
2.3.2	Tipos de franjas	45
2.3.3	Aplicaciones	47
2.3.4	Interferómetro de Twyman-Green	47
2.3.5	Interferómetro de Mach-Zehnder	49
2.4	Interferencia de ondas múltiples en láminas de caras plano-paralelas	49
2.4.1	Reflectancia y transmitancia de una lámina	50
2.4.2	Posición de los anillos	52
2.4.3	Distribución de intensidad	53
2.4.4	Finura de los anillos y luz cuasi-monocromática	54
2.5	Interferómetro de Fabry-Perot	56
2.5.1	Descripción	56
2.5.2	Absorción en las caras	57
2.5.3	Poder de resolución espectral	58
2.5.4	Intervalo espectral libre	60
2.5.5	Resumen de características	61
2.6	Interferencias múltiples en películas delgadas	61
2.6.1	Filtros interferenciales	62
2.6.2	Películas antirreflectantes	63
3	Teoría escalar de la difracción	67
3.1	Introducción	67
3.2	El principio de Huygens-Fresnel	68
3.3	Teoría electromagnética. Aproximación escalar	71
3.4	Teorema de la integral de Kirchhoff	72
3.5	Aplicación de la integral de Kirchhoff a la difracción	74
3.6	Aplicación a la propagación de una onda esférica	77

3.7	Comentarios adicionales sobre la integral de Fresnel-Kirchhoff	80
3.8	Difracción de Fraunhofer y difracción de Fresnel	81
3.9	Apéndices	85
3.9.1	Demostración del teorema de la integral de Kirchhoff	86
3.9.2	Integración sobre una zona de Fresnel	87
4	Difracción de Fraunhofer por una abertura	89
4.1	Configuración geométrica	89
4.2	Difracción por una abertura rectangular	90
4.2.1	Distribución de intensidad sobre el eje X'	92
4.2.2	Distribución de intensidad sobre el eje Y' y el plano $X'Y'$	94
4.2.3	Difracción por una rendija	95
4.3	Difracción por una abertura circular	96
4.4	Poder de resolución de los instrumentos ópticos	99
4.4.1	Instrumentos ópticos y difracción de Fraunhofer	99
4.4.2	Difracción de Fraunhofer y poder de resolución	100
4.4.3	Ejemplos	102
4.5	Apéndices	104
4.5.1	Integral de la abertura circular	105
5	Redes de difracción	107
5.1	Principio de la red de difracción	107
5.1.1	Dos aberturas, reanálisis del experimento de Young	109
5.1.2	Muchas aberturas distribuidas al azar	110
5.1.3	Muchas aberturas distribuidas regularmente	110
5.2	Red de difracción mono-dimensional	111
5.3	Propiedades de las redes de difracción	116
5.3.1	Poder de resolución espectral	116
5.3.2	Dispersión angular	118
5.3.3	Intervalo espectral libre	118
5.4	Tipos de redes de difracción	119
5.4.1	Redes de perfil controlado	120
5.4.2	Espectroscopios de red	122
5.4.3	Redes de dos y tres dimensiones	122
6	Teoría difraccional de la formación de imágenes	125
6.1	Introducción	125

6.2	El problema de la iluminación en el microscopio	126
6.2.1	Iluminación incoherente	127
6.2.2	Iluminación coherente	128
6.3	Teoría de Abbe para iluminación coherente	128
6.3.1	Poder de resolución en la teoría de Abbe	130
6.4	El procesador óptico $4f$. Filtrado de frecuencias espaciales	135
6.5	Instrumentos ópticos como sistemas lineales	136
6.6	Objeto puntual sobre el eje (función impulso)	139
6.7	Análisis puntual de un objeto extenso (emisión coherente)	140
6.8	Transmisión de frecuencias espaciales	142
6.8.1	Función de transmisión	142
6.8.2	Ejemplo: abertura circular	143
6.8.3	Presencia de aberraciones. Iluminación incoherente	144
6.9	Apéndices	145
6.9.1	Deducción de la fórmula 6-4	145
6.9.2	Microscopio de contraste de fase de Zernike	145
6.9.3	Función de transmisión con iluminación incoherente	150

Capítulo 1

Principios generales de las interferencias

1.1 Introducción

Cuando dos o más haces de luz se superponen en una pantalla normalmente se observa una iluminación de la misma más intensa y homogénea que cuando incide un solo haz. Bajo determinadas condiciones, sin embargo, la pantalla puede aparecer iluminada de forma inhomogénea, presentando zonas que están iluminadas intensamente junto a otras escasamente iluminadas; es decir, la intensidad total en un punto no es la suma de las intensidades que se superponen. En la figura 1-1 se ha ilustrado la superposición de dos ondas de la misma frecuencia y amplitud V_0 y de intensidad $I_0 = cte V_0^2$. En un punto del espacio en que ambas ondas están en fase (Fig. 1-1a), la amplitud de la suma será $2V_0$ y la intensidad $4I_0$. En cambio, en un punto en que están en oposición de fase (Fig. 1-1b), se tiene amplitud e intensidad cero. Este resultado es característico de todo tipo de ondas y parece indicar que la energía no se conserva. En realidad, la energía se conserva globalmente pero se *redistribuye* en toda la región en que se superponen las dos ondas. Aquí se pone de manifiesto claramente que los conceptos de amplitud y de fase se refieren a la onda como un todo y no en un punto concreto del espacio.

Este es el fenómeno denominado *interferencia* de ondas luminosas. Típicamente, la distribución de la luz en regiones claras u oscuras presenta cierta periodicidad, por lo que recibe el nombre genérico de *franjas de interferencia*. Los principios y características generales del fenómeno son los mismos para las diferentes regiones espectrales de la

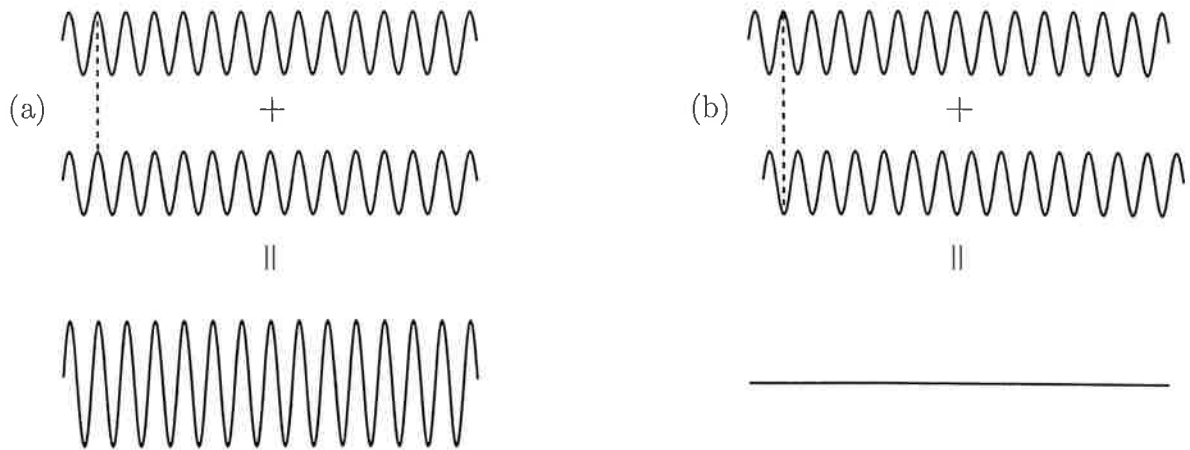


Figura 1-1 Ilustración de la superposición de dos ondas de la misma frecuencia y amplitud. (a) En un punto en que están en fase, la amplitud resultante es el doble (la intensidad es el cuádruple). (b) En un punto en que están en oposición de fase, la amplitud y la intensidad son cero.

radiación electromagnética, así como para otras ondas no electromagnéticas (acústicas, sísmicas, de De Broglie, etc.). Pero las interferencias en la región espectral del visible y sus proximidades (que son el objeto de la óptica) presentan ciertas peculiaridades de las cuales nos vamos a ocupar en el grupo de capítulos que se inician con éste. Además nos limitaremos al caso de respuesta lineal por parte del medio material en el que coinciden las ondas, es decir supondremos que se cumple el *principio de superposición*. En la última parte del curso, dedicada al laser, analizaremos brevemente el caso de los medios no lineales.

Las interferencias luminosas constituyen una herramienta extraordinariamente poderosa para estudiar y utilizar con provecho muchas de las propiedades de la luz. Algunos ejemplos importantes son los siguientes: *i)* Históricamente, los fenómenos de interferencia permitieron establecer la naturaleza ondulatoria de la luz, mediante una serie de famosos experimentos realizados por *Young*, *Fresnel* y *Arago*, entre otros, alrededor del año 1800. *ii)* Son el único método que permite acceder a la medida de la fase de las ondas luminosas, cuyo período es extremadamente corto ($T \sim 10^{-15}$ s); de este modo se puede caracterizar la coherencia, tanto temporal como espacial, de una fuente de luz (recuérdese el capítulo 2 de la parte de Óptica Electromagnética). *iii)* Son la base de importantes aplicaciones científicas y técnicas: la espectroscopía de alta resolución, la holografía, la medida precisa de distancias muy pequeñas $\sim \text{Å}$, la determinación de coefi-

cientes de penetración C_x de aviones y automóviles en los túneles aerodinámicos, etc. *iv)* Son las responsables de numerosos fenómenos naturales (como los vistosos colores de las alas de ciertas mariposas y aves tropicales, o las burbujas de jabón).

El grupo de capítulos que se inicia aquí está dedicado a las interferencias luminosas y a algunas de sus aplicaciones, incluyendo también la difracción que, en cierta medida, se puede considerar como un fenómeno interferencial. Este primer capítulo se dedica a los principios generales del fenómeno y por esta razón es especialmente importante. Se inicia con el análisis del caso ideal de interferencia entre dos ondas estrictamente monocromáticas, particularizándolo al caso escalar que es el más frecuente y el más sencillo de tratar. A continuación se tratan los casos más realistas de ondas cuasimonocromáticas y de fuentes luminosas no puntuales, lo que nos permite volver sobre los importantes conceptos de coherencia temporal y de coherencia espacial, introducidos en la parte de Óptica Electromagnética.

1.2 Interferencia de dos ondas estrictamente monocromáticas

Para introducir de forma más cómoda los conceptos básicos vamos a considerar en esta sección el caso más sencillo de interferencia de dos ondas estrictamente monocromáticas. En las secciones siguientes se tratan las importantes correcciones que hay que hacer a este caso cuando se consideran ondas reales.

1.2.1 El término de interferencia

Consideremos un cierto punto del espacio donde se superponen dos ondas monocromáticas cuyos campos eléctricos vienen dados por las siguientes expresiones:

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E}_{01} e^{i\phi_1} e^{-i\omega_1 t}\}; \quad \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E}_{02} e^{i\phi_2} e^{-i\omega_2 t}\}; \quad (1-1)$$

donde las fases ϕ_1 y ϕ_2 incluyen la dependencia espacial de las ondas, pero son independientes del tiempo (véase el apéndice 1.8.1 para el caso en que sí dependen del tiempo).

Supondremos que están polarizadas linealmente a lo largo de los vectores constantes reales \vec{E}_{01} y \vec{E}_{02} . Las intensidades de estas ondas vienen dadas por la expresión:

$$I_i = c \varepsilon_0 \langle |\vec{E}_i|^2 \rangle = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_{0i}^2 \quad (i = 1, 2). \quad (1-2)$$

En la región del espacio en que estas ondas se superpongan, el campo resultante será simplemente la suma vectorial de los campos de las dos ondas,

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad (1-3)$$

por lo que la intensidad luminosa resultante será:

$$I = c \varepsilon_0 \langle |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2 \rangle = c \varepsilon_0 (\langle |\vec{E}_1|^2 \rangle + \langle |\vec{E}_2|^2 \rangle + 2 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle), \quad (1-4)$$

o bien, teniendo en cuenta (1-2) y llamando I_{12} al último término,

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}. \quad (1-5)$$

Esta expresión indica que la intensidad resultante de la superposición de las dos ondas no es la simple suma de las intensidades individuales, hay que añadir el término cruzado I_{12} . En el caso en que $\omega_1 \neq \omega_2$, este término se anula al hacer el promedio temporal, y se recupera la sencilla expresión $I = I_1 + I_2$ que no da lugar a fenómenos interferenciales. Pero si se tiene $\omega_1 = \omega_2$, el término I_{12} no es cero en general, siendo el responsable de que la intensidad (1-5) varíe de unos puntos a otros y dando lugar, por tanto, a las figuras de interferencia. Por esta razón se le denomina *término de interferencia*. A partir de aquí se supondrá $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. En estas condiciones, el término de interferencia se puede escribir:

$$I_{12} = 2 c \varepsilon_0 \langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle = c \varepsilon_0 \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \Re\{e^{i\delta}\}, \quad (1-6)$$

siendo,

$$\delta = \phi_1 - \phi_2. \quad (1-7)$$

O bien, haciendo explícita la parte real del último factor de (1-6),

$$I_{12} = c \varepsilon_0 \vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02} \cos \delta. \quad (1-8)$$

En la expresión anterior se ve que la interferencia depende de la polarización de las ondas (\vec{E}_{01} y \vec{E}_{02}) y de la diferencia de fase δ . En la mayoría de los casos prácticos el papel de la polarización no es observable; por tanto, la magnitud clave del fenómeno interferencial es la diferencia de fase.

1.2.2 Influencia de la polarización de la luz

El término de interferencia (1-8) depende de la polarización de los haces que interfieren a través del producto escalar $\vec{E}_{01} \cdot \vec{E}_{02}$. En particular, si se trata de dos haces polarizados linealmente con sus vectores campo eléctrico perpendiculares, se tiene $I_{12} = 0$ y no se observa interferencia. La observación experimental de este hecho llevó a los franceses Fresnel y Arago a la conclusión de que la luz era una onda transversal. La razón física de este fenómeno es que la superposición de dos oscilaciones perpendiculares de la misma frecuencia da lugar a luz polarizada elípticamente, y, por tanto, los cambios de fase δ originan cambios en la elipse de polarización en vez de en la amplitud. Este tipo de *interferencias con luz polarizada* es menos frecuente, más complejo de estudiar, y no lo vamos a considerar aquí.

1.2.3 Aproximación escalar

A partir de ahora consideraremos el caso en que \vec{E}_{01} y \vec{E}_{02} son paralelos. Este caso se presenta de forma aproximada con mucha frecuencia en la práctica y, al desaparecer el carácter vectorial de los campos, todas las expresiones son ahora escalares. Teniendo en cuenta (1-2), se puede escribir:

$$I_{12} = c \varepsilon_0 E_{01} E_{02} \cos \delta = 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (1-9)$$

y, a su vez, la expresión (1-5) queda:

$$I = I_1 + I_2 + 2 \sqrt{I_1 I_2} \cos \delta = I_0 (1 + M \cos \delta); \quad (1-10)$$

para el último miembro de la anterior se han introducido,

$$I_0 = I_1 + I_2 \quad \text{y} \quad M = \frac{2 \sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}, \quad (1-11)$$

donde M se suele llamar *factor de modulación*. Si, como ocurre con frecuencia, las intensidades de los dos haces que interfieren son muy parecidas, haciendo $I_1 = I_2$ en las anteriores se tiene $I_0 = 2 I_1$ y $M = 1$, y la (1-10) queda,

$$I = 2 I_1 (1 + \cos \delta) = 4 I_1 \cos^2 \frac{\delta}{2}. \quad (1-12)$$

En cualquiera de las formas (1-10) o (1-12), la intensidad luminosa presenta máximos cuando $\cos \delta = 1$, es decir, cuando se cumple:

$$\delta = m 2\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1-13)$$

y mínimos cuando $\cos \delta = -1$, es decir:

$$\delta = (2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (1-14)$$

Por tanto los máximos aparecen cuando la diferencia de fase es un múltiplo entero de 2π , y los mínimos cuando es un múltiplo impar de π . El número m recibe el nombre de *orden interferencial*. Para el caso de intensidades iguales se tiene $I_{max} = 4I_1$ y $I_{min} = 0$. En la figura 1-2 se han representado las funciones (1-10) y (1-12).

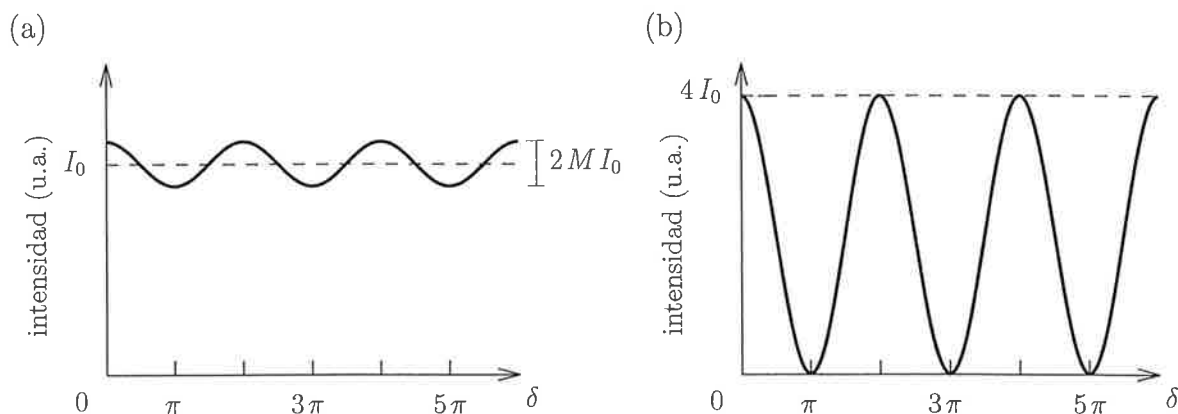


Figura 1-2 Distribución de intensidad producida por interferencia de dos ondas estrictamente monocromáticas. (a) $I_1 \neq I_2$; (b) $I_1 = I_2$.

Las fórmulas (1-10) y (1-12) también son válidas para haces monocromáticos totalmente despolarizados (polarización natural), puesto que la polarización natural se puede representar por dos polarizaciones lineales perpendiculares e incoherentes entre sí.[†] Entonces, la interferencia de cada una de las componentes se puede considerar por separado, y la intensidad total se obtiene como suma de intensidades.

[†]Véase, por ejemplo, la sección 10.8.2 de *Principles of Optics* de Born y Wolf, 1980, al discutir el grado de polarización de las ondas cuasimonocromáticas mediante el uso de la matriz de coherencia.

1.2.4 Visibilidad de las franjas

En relación con la distribución de intensidad entre máximos y mínimos (véase la figura 1-2), es útil definir una nueva magnitud llamada *visibilidad de las franjas* \mathcal{V} como medida cuantitativa de lo contrastadas que se ven:

$$\mathcal{V} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}, \quad (1-15)$$

que puede variar entre 1 (valor máximo), y 0 (mínimo). Utilizando la (1-10), la visibilidad en el caso que nos ocupa de dos ondas estrictamente monocromáticas resulta ser igual al factor de modulación:

$$\mathcal{V} = M, \quad (1-16)$$

que en el caso de intensidades iguales, fórmula (1-12), toma su valor máximo $\mathcal{V}=1$.

1.2.5 Dos ondas esféricas

Si las dos ondas monocromáticas son esféricas, es fácil ver que las franjas de interferencia están formadas por una familia de hiperboloides de revolución con focos comunes, situados precisamente en las fuentes puntuales que generan las ondas. Para verlo, consideremos las dos ondas esféricas escalares siguientes (cuyos vectores \vec{E} son paralelos en cada punto \vec{r}) ambas de frecuencia ω :

$$E_1(r, t) = \Re \left\{ \frac{E_{01}}{r_1} e^{i(kr_1 - \omega t + \phi_{01})} \right\}, \quad E_2(r, t) = \Re \left\{ \frac{E_{02}}{r_2} e^{i(kr_2 - \omega t + \phi_{02})} \right\} \quad (1-17)$$

siendo r_1 y r_2 las distancias desde las fuentes luminosas al punto considerado, y ϕ_{01} y ϕ_{02} las fases iniciales constantes. Comparando éstas con (1-1), se tiene $\phi_1 = k r_1 + \phi_{01}$ y $\phi_2 = k r_2 + \phi_{02}$, y por tanto la diferencia de fase (1-7) se puede escribir:

$$\delta = \phi_2 - \phi_1 = k(r_2 - r_1) + \phi_{02} - \phi_{01} = k \Delta s + \delta_0 = k_0 n \Delta s + \delta_0 = 2\pi \frac{\Delta L}{\lambda_0} + \delta_0, \quad (1-18)$$

donde la diferencia de camino geométrico Δs se refiere a las distancias desde las fuentes al punto de observación, y $\Delta L = n \Delta s$ es la diferencia de camino óptico. El lugar geométrico de δ constante es el de los puntos cuya diferencia de distancias $r_2 - r_1$ a

las fuentes luminosas es constante, que es un hiperboloide de revolución cuyos focos son las fuentes. Por tanto, la figura de interferencia que se obtiene al variar δ consiste en una familia de hiperboloides con focos comunes en las fuentes (véase la Fig. 1-3). Las franjas de interferencia resultantes son las curvas que produce la intersección de estos hiperboloides con la pantalla de observación. Este tipo de franjas se presentan aproximadamente en los dispositivos del tipo de Young que se discuten en la Sección siguiente. Como las franjas se pueden ver en una región grande del espacio moviendo la pantalla adecuadamente, se dice que son *franjas no localizadas*. En otros dispositivos interferenciales las franjas sólo aparecen en planos determinados y se habla de *franjas localizadas*.

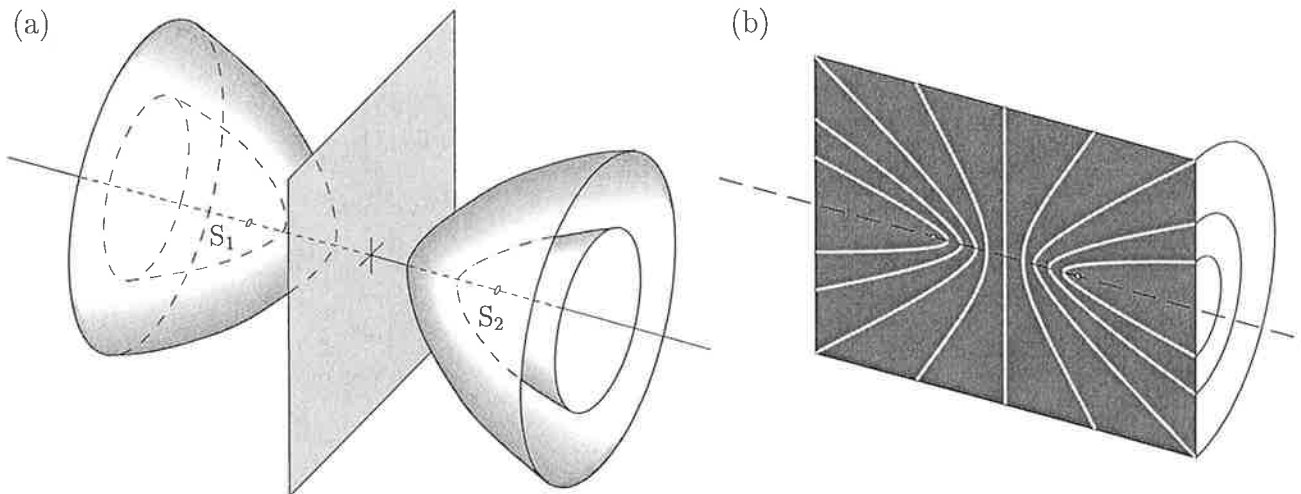


Figura 1-3 (a) Las “franjas” de interferencia no localizadas producidas por dos ondas esféricas procedentes de dos fuentes puntuales S_1 y S_2 , son hiperboloides de revolución alrededor del eje S_1-S_2 con focos comunes en estos puntos. (b) Hipérbolas resultantes de la intersección de los hiperboloides con un plano que pasa por S_1 y S_2 . Como la pantalla se encuentra habitualmente muy alejada de las fuentes y no pasa por estos puntos, su intersección con los hiperboloides produce franjas que son muy aproximadamente líneas rectas.

1.2.6 Dos ondas planas

En el caso en que las dos ondas que interfieren son planas, además de monocromáticas, es fácil ver que las franjas de interferencia son planos paralelos entre sí y equiespaciados. Para verlo, consideremos la interferencia de las dos ondas planas siguientes (ambas de

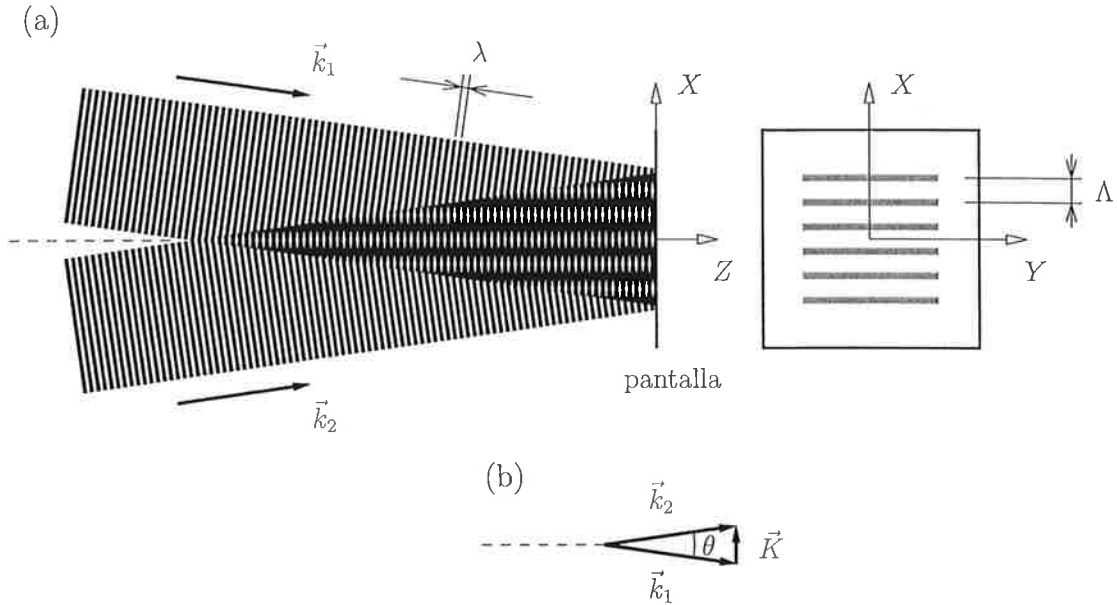


Figura 1-4 (a) Sección por el plano del papel de dos ondas planas que interfieren, y las franjas que se observan sobre una pantalla colocada perpendicularmente al papel. (b) Ilustración para el cálculo del espaciado entre las franjas que aparecen en la pantalla.

frecuencia ω):

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E}_{01} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_{01})}\}, \quad \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E}_{02} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega t + \phi_{02})}\}; \quad (1-19)$$

siendo $k_1 = k_2 = k$, y ϕ_{01} y ϕ_{02} las fases iniciales constantes. Comparando éstas con (1-1), se tiene $\phi_1 = \vec{k}_1 \cdot \vec{r} + \phi_{01}$ y $\phi_2 = \vec{k}_2 \cdot \vec{r} + \phi_{02}$, y por tanto la diferencia de fase (1-7) ahora se escribe:

$$\delta = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} + \phi_{02} - \phi_{01} = \vec{K} \cdot \vec{r} + \delta_0 \quad (1-20)$$

siendo,

$$\vec{K} = \vec{k}_2 - \vec{k}_1; \quad \delta_0 = \phi_{02} - \phi_{01}. \quad (1-21)$$

De acuerdo con (1-20), el lugar geométrico de los puntos con igual δ (igual intensidad) es un plano perpendicular al vector \vec{K} . En la figura 1-4a se ilustra el conjunto de estos planos que, al ser interceptados por la pantalla de observación, dan lugar a franjas de interferencia rectilíneas y paralelas. Para calcular más cómodamente el espaciado entre estos planos, elijamos el eje X en la dirección de \vec{K} y el eje Z en la dirección de la bisectriz de \vec{k}_1 y \vec{k}_2 . Si llamamos Λ al espaciado entre planos, como la diferencia de fase entre dos consecutivos debe ser 2π , se tendrá $\vec{K} \cdot \vec{r} = K\Lambda = 2\pi$, y el valor de $K = 2\pi/\Lambda$

se puede calcular fácilmente de la figura 1-4b:

$$K = \frac{2\pi}{\Lambda} = 2k \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \quad \rightarrow \quad \Lambda = \frac{\lambda}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}. \quad (1-22)$$

Las magnitudes \vec{K} y Λ suelen llamarse respectivamente *vector* y *periodo* de la red de planos. Este tipo de configuración interferencial es de uso común en la producción de hologramas de volumen en cristales electroópticos que tiene una gran variedad de aplicaciones.

Nótese que el espaciado Λ se puede variar por medio del ángulo entre los haces que interfieren de acuerdo con (1-22). Para haces “contrapropagantes” ($\theta/2=90^\circ$) se tiene el espaciado mínimo $\Lambda=\lambda/2$. Para haces que se propagan en la misma dirección ($\theta/2=0^\circ$) se tiene el espaciado máximo $\Lambda=\infty$ y desaparecen las franjas de interferencia (ambas ondas se confunden en una).

1.3 Experimento de Young

1.3.1 Uso de fuentes de luz reales

Los experimentos de interferencias se hacen necesariamente con fuentes de luz reales que no son estrictamente monocromáticas. Las consecuencias de este hecho se discuten con más detalle a partir de la sección siguiente, pero aquí debemos mencionar que, en general, resulta difícil observar franjas de interferencia con las fuentes de luz ordinarias. La excepción la constituye la luz laser, con la que resulta fácil producir franjas visibles y contrastadas. Hacia el año 1800, sin embargo, Young no disponía de este tipo de luz y tuvo que guiarse de su intuición y experimentación para conseguir las primeras franjas de interferencia con luz de la historia y demostrar la naturaleza ondulatoria de la luz.

El diseño experimental de Young se ilustra en la figura 1-5 y consiste en lo siguiente. En primer lugar se simula una fuente luminosa “puntual” S colocando una pantalla con un pequeño orificio delante de una fuente de luz extensa; los rayos de luz que pasan por el orificio se abren por efecto de la difracción y el frente de onda resultante es

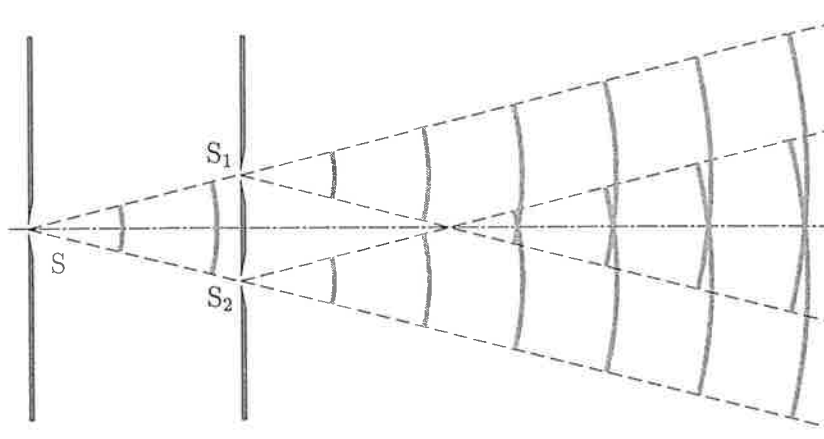


Figura 1-5 Esquema del dispositivo experimental diseñado por Young para observar franjas de interferencia con una fuente de luz real.

aproximadamente esférico con centro en S . A continuación, se seleccionan dos trocitos S_1 y S_2 del frente de onda anterior mediante sendos orificios pequeños hechos en una segunda pantalla; de nuevo, la luz se abre por difracción en cada uno de estos orificios que actúan como centros emisores de ondas aproximadamente esféricas. En la última pantalla de observación se superponen los haces procedentes de ambos orificios. Para un punto arbitrario P de la pantalla, la diferencia de camino entre ambas ondas será $\overline{S_2P} - \overline{S_1P}$. Por tanto, la interferencia corresponde aproximadamente a la de dos ondas esféricas de centros S_1 y S_2 que se ha discutido en la sección anterior. El éxito de Young se basó en hacer interferir dos ondas “gemelas” procedentes de la misma onda inicial, con lo que obtenía un alto grado de coherencia entre ellas. Las interferencias obtenidas con este dispositivo (y otros similares) se denominan por *división del frente onda*, en contraposición a las que veremos en el capítulo siguiente que se obtienen por *división de amplitud* mediante reflexiones en las caras de láminas de vidrio.

1.3.2 Posición de las franjas en la pantalla

El cálculo de la posición de los máximos y los mínimos de intensidad sobre la pantalla se hace cómodamente apoyándose en la figura 1-6, donde se indica el sistema de ejes coordenados elegido. Dada la lejanía de la pantalla en comparación con la distancia entre los orificios, supondremos que las intensidades de las dos ondas esféricas al llegar

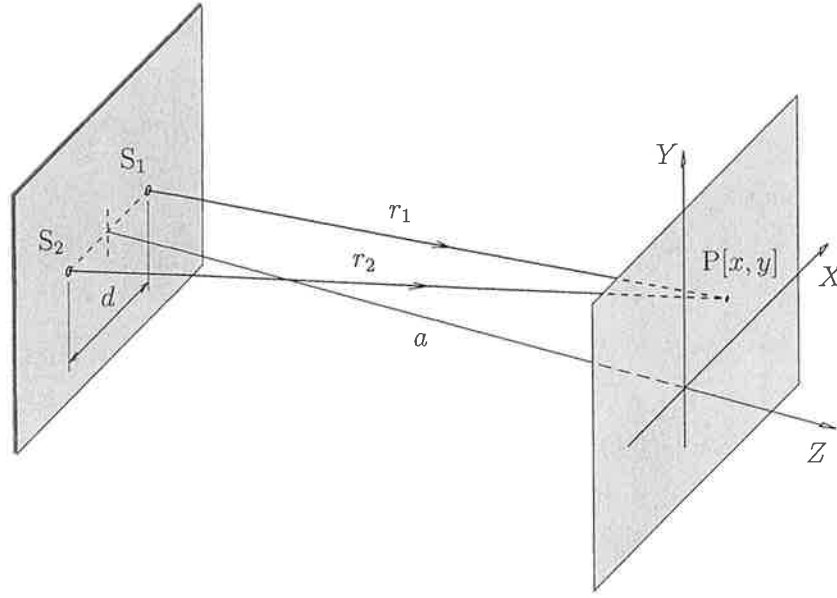


Figura 1-6 Experimento de Young: parámetros que determinan la diferencia de camino entre la luz procedente de S_1 y S_2 . En un montaje real se cumple que $d \ll a$.

al punto P son iguales y por tanto aplicaremos la fórmula (1-12), $I = 2 I_1 (1 + \cos \delta)$, para calcular la intensidad. En el caso que nos ocupa de ondas esféricas, la magnitud δ viene dada por (1-18), $\delta = k_0 n \Delta s$, siendo n el índice de refracción del medio y Δs la diferencia de camino geométrico desde el punto $P[x, y]$ a los orificios S_1 y S_2 . Si la distancia entre los orificios es d y la distancia entre éstos y la pantalla es a , los caminos r_1 , r_2 recorridos por la luz, vendrán dados por:

$$r_1^2 = \left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + a^2, \quad r_2^2 = \left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + a^2, \quad (1-23)$$

de donde restando y teniendo en cuenta que $a \gg x, d$ se obtiene,

$$r_2^2 - r_1^2 = 2 x d = (r_2 + r_1)(r_2 - r_1) \simeq 2 a \Delta s \quad (1-24)$$

y la diferencia de camino óptico será:

$$\Delta L = n \Delta s = \frac{n x d}{a}. \quad (1-25)$$

A partir de esta última, la condición de máximo (1-13): $\delta = m 2\pi$, teniendo en cuenta la (1-18), se puede escribir: $\Delta L = m \lambda_0$, es decir,

$$\text{máximos} \rightarrow x_m = m \frac{a \lambda_0}{n d} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1-26)$$

y la condición de mínimo (1-14): $\delta = (2m + 1)\pi$, implica que $\Delta L = (2m + 1)\lambda_0/2$, es decir,

$$\text{mínimos} \quad \rightarrow \quad x_m = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{a \lambda_0}{n d} \quad (m = 0, 1, 2, \dots). \quad (1-27)$$

Como las condiciones anteriores de máximo o mínimo sólo dependen de la coordenada x , en la pantalla se observan franjas “rectilíneas” alargadas en la dirección Y . El que sean rectas se debe a la aproximación que se ha hecho en (1-24) al estar la pantalla muy alejada. En rigor, las franjas son curvas según se ha mencionado al final de la sección 1.2.5. El número entero m se denomina *orden del máximo*. Según se ha mencionado antes $\Delta L = m \lambda_0$, por tanto, al máximo de orden m le corresponde una diferencia de camino óptico de m longitudes de onda entre los dos haces que interfieren.

De las expresiones (1-26) y (1-27) también se obtiene la separación entre franjas (máximos o mínimos) que resulta ser:

$$l = x_{m+1} - x_m = \frac{a \lambda_0}{n d}. \quad (1-28)$$

Midiendo la magnitud l sobre la pantalla, y conocidos a y d , se puede determinar la longitud de onda λ_0 de la luz usada. Así, además de ser una demostración inequívoca de la naturaleza ondulatoria de la luz, el experimento de Young permite medir de modo muy simple (aunque no sea muy preciso) una magnitud tan pequeña como λ_0 .

1.3.3 Uso de lentes en el dispositivo de Young

Muchas veces interesa que la pantalla no esté tan lejos en el experimento de Young. Si se coloca una lente convergente en la parte de salida de la luz de los orificios S_1 y S_2 , los rayos que salen paralelos a una dirección determinada se superpondrán en el plano focal de la lente. Por tanto, para observar las franjas de interferencia basta colocar la pantalla en la posición del plano focal en vez de muy alejada. La diferencia de camino Δs ahora viene dada por (véase la Fig. 1-7):

$$\Delta s = d \operatorname{sen} \theta \simeq d \frac{x}{f'}, \quad (1-29)$$

siendo f' la distancia focal de la lente, que ahora desempeña el mismo papel que a en la figura 1-6.

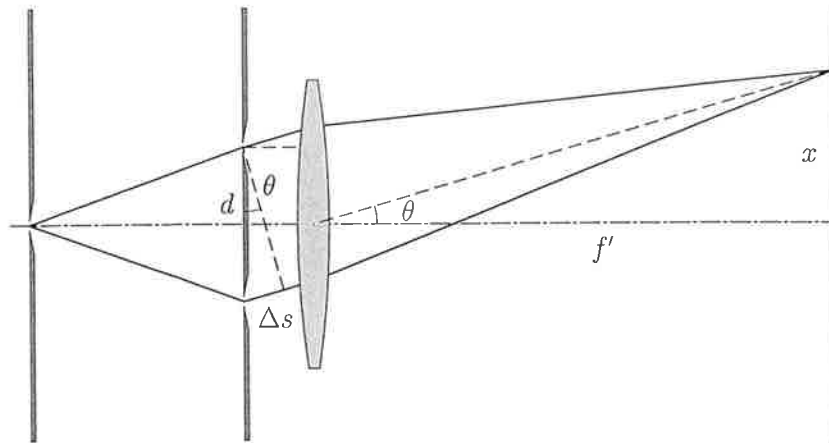


Figura 1-7 Montaje del experimento de Young usando una lente convergente. La pantalla se coloca en el plano focal, y la distancia focal f' desempeña el mismo papel que a en la figura 1-6.

1.3.4 Dispositivos similares

En su tiempo, el experimento de Young introdujo un cambio radical en el modelo de Newton sobre la naturaleza corpuscular de la luz, que era el predominante en esa época. Por ello fue sometido a todo tipo de análisis críticos. En particular, se adujo como elemento perturbador de la trayectoria de las partículas luminosas el hecho de que la luz no alcanzaba la pantalla por caminos rectilíneos ininterrumpidos que cumplen las leyes de la óptica geométrica. Para demostrar que esto no era un obstáculo, se propusieron otros experimentos de interferencia utilizando dispositivos similares en los que las fuentes secundarias S_1 y S_2 no eran orificios pequeños. Entre ellos citaremos: los *espejos de Fresnel* (Fig. 1-8a) en los que S_1 y S_2 son las imágenes virtuales de S dadas por dos espejos que forman un ángulo próximo a 180° ; el *biprisma de Fresnel* (Fig. 1-8b) en donde las imágenes virtuales ahora están formadas por dos prismas de ángulo pequeño unidos por sus bases; la *lente partida de Billet* (Fig. 1-8c) en la que S_1 y S_2 son los focos de cada mitad de la lente; y el *espejo de Lloyd* (Fig. 1-8d) donde S_1 es la fuente real y S_2 es la imagen virtual dada por el espejo. Todos estos dispositivos producen exactamente el mismo tipo de franjas que el dispositivo original de Young y su aparición contribuyó, junto con otros experimentos, a que se aceptara la hipótesis de Young sobre la naturaleza ondulatoria de la luz.

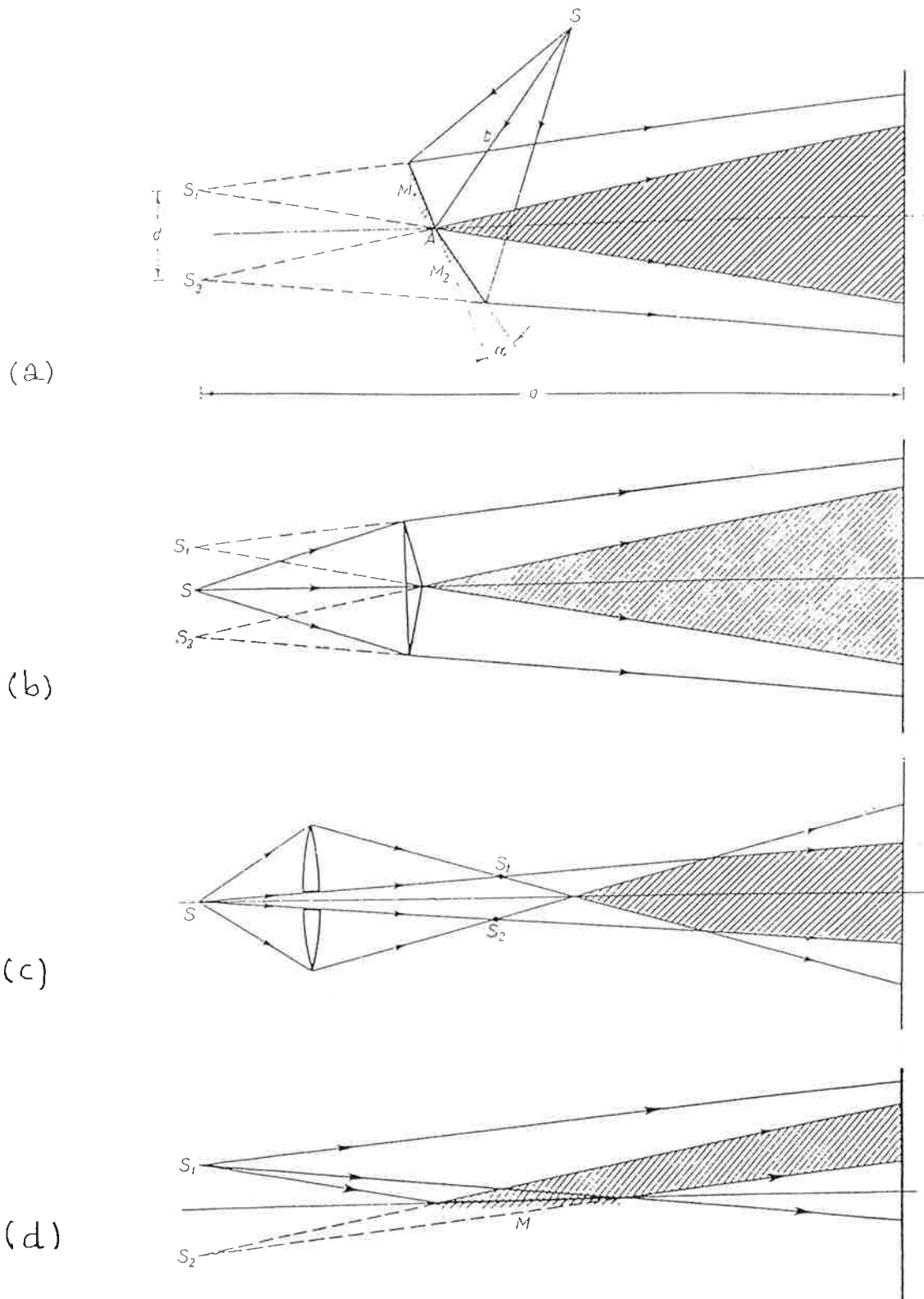


Figura 1-8 Diferentes dispositivos para observar interferencias de Young. (a) Espejos de Fresnel. (b) Biprisma de Fresnel. (c) Lente partida de Billet. (d) Espejo de Lloyd.

1.3.5 Experimento de Young y dualidad onda-partícula

El dispositivo de Young se ha utilizado también como montaje experimental idealizado para poner de manifiesto el significado de la hipótesis de la dualidad onda-partícula de la mecánica cuántica. El dispositivo de Young está diseñado para demostrar el carácter ondulatorio de la luz, puesto que la observación experimental de las franjas de interferencia se considera una prueba irrefutable de que estamos tratando con ondas. De hecho, una partícula indivisible como el fotón sólo puede pasar por uno de los orificios, S_1 o S_2 , pero nunca por los dos al mismo tiempo como hace un frente de onda para originar las interferencias. Sin embargo, si la intensidad de la fuente S se controla de forma que emita los fotones de uno en uno con separación temporal suficiente, y en la pantalla se sitúa un sistema de detección que también detecte la llegada de un fotón individual, el resultado experimental resulta sorprendente. Cada fotón individual produce un único impacto puntual en la pantalla en posiciones aparentemente aleatorias, indicando que estamos tratando con partículas y no con ondas (véase la Fig. 1-9). Pero a medida que el número de impactos va creciendo, la distribución de los mismos ya no aparece aleatoria; aparecen más y más densos en las posiciones correspondientes a los máximos de las franjas de interferencia. Después de muchísimos impactos, la estructura granular desaparece en la pantalla y sólo se observa la distribución de intensidad continua correspondiente a las franjas de Young. En consecuencia, la luz se ha comportado como onda (en la propagación a través de los orificios) y como partícula (en la interacción con el

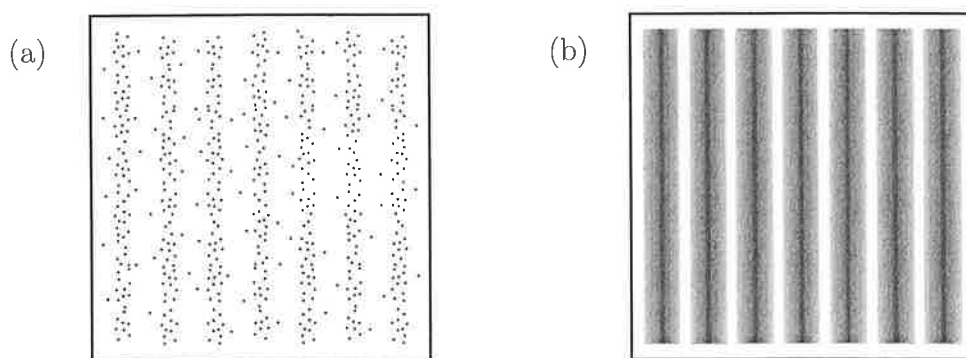


Figura 1-9 Distribución de luz en la pantalla en un experimento de Young realizado en condiciones de muy baja intensidad. (a) transcurrido un tiempo corto, (b) transcurrido un tiempo largo.

detector). Además, la intensidad (cuadrado de la función de onda) en un punto de la pantalla determina la probabilidad de que la partícula fotón sea detectada en ese punto.

1.4 Franjas con luz no monocromática

En un experimento de Young real se usa una fuente de luz necesariamente no monocromática, que en general contiene infinitas frecuencias. Al superponerse en la pantalla los dos haces, el término de interferencia I_{12} de la expresión (1-5) se anula para las frecuencias que son diferentes (se hace cero el promedio temporal) y es distinto de cero sólo para frecuencias iguales. Por tanto, cada frecuencia producirá en la pantalla su propia serie de franjas. Las posiciones de los máximos, por ejemplo, vienen determinadas por el valor de λ_0 asociado a esa frecuencia de acuerdo con la fórmula (1-26): $x_m = m(a\lambda_0)/(nd)$.

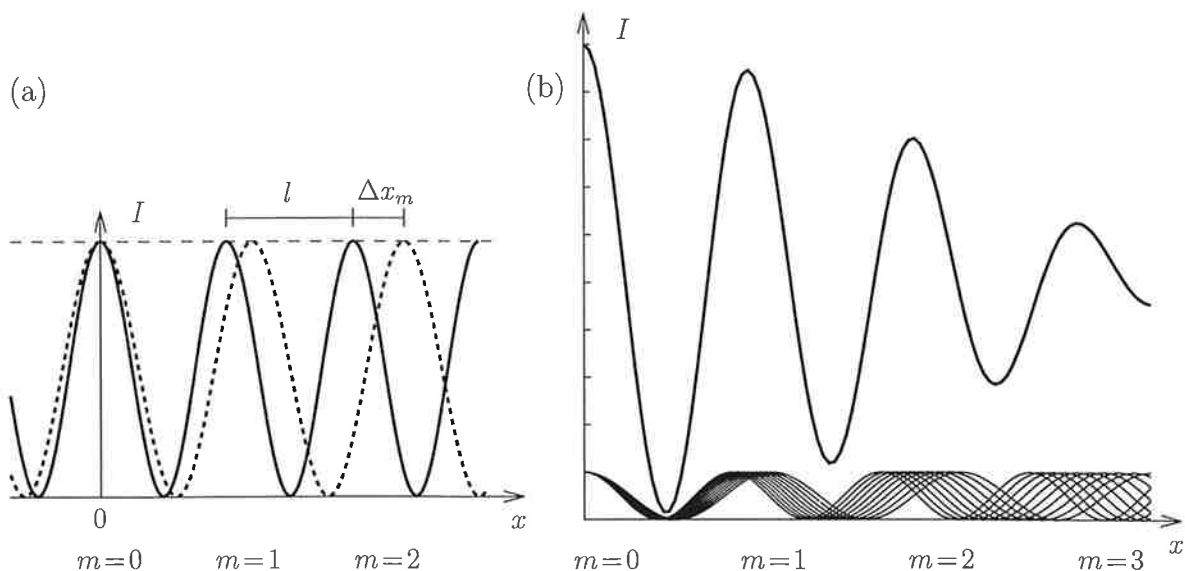


Figura 1-10 (a) Franjas de interferencia producidas por una fuente que emite luz de dos frecuencias λ_0 (línea continua) y $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ (línea de trazos). Para el orden interferencial $m=0$ (en $x=0$) coinciden los máximos de ambas, pero los siguientes máximos se van separando a medida que aumenta m . (b) Aspecto de las franjas de interferencia en el caso de un espectro continuo de λ .

En primer lugar, consideramos el caso simple de una luz con sólo dos componentes λ_0 y $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$ relativamente próximas. El máximo de orden m de la longitud de onda

mayor estará desplazado, respecto al mismo máximo de la longitud de onda menor, una distancia que obtenemos derivando la ecuación (1-26):

$$\Delta x_m = m \frac{a}{n d} \Delta \lambda_0 = m l \frac{\Delta \lambda_0}{\lambda_0}; \quad (1-30)$$

donde se ha introducido el espaciado entre franjas $l = (a \lambda_0) / (n d)$ dado por la expresión (1-28). En la figura 1-10a se ha representado la intensidad de las franjas para cada componente; la intensidad total será la suma de ambas series, por lo que los máximos de orden bajo se verán ensanchados y los de ordenes mayores pueden verse separados. Si en vez de las dos longitudes de onda consideradas, la fuente emite un conjunto infinito de longitudes de onda, comprendidas entre λ_0 y $\lambda_0 + \Delta \lambda_0$, habrá infinitas series de franjas (una para cada λ). Todos los máximos correspondientes al orden interferencial cero coinciden en $x = 0$, y a partir de ahí los máximos se van ensanchando y perdiendo intensidad a medida que m aumenta, al mismo tiempo que los mínimos se hacen menos oscuros. Como consecuencia de ello la visibilidad (1-15) disminuye y las franjas aparecen borrosas (Fig. 1-10b). Como el ensanchamiento de los máximos también aumenta al aumentar $\Delta \lambda_0$, para un valor suficientemente grande de $\Delta \lambda_0$ las franjas desaparecen. Esto es lo que ocurre cuando se usa luz blanca, para la que $\Delta \lambda_0 = (750 - 400) \text{ nm} = 350 \text{ nm}$; alrededor del máximo central $m = 0$ blanco se observan los máximos $m = 1$ para los diferentes colores del espectro visible, y a partir de $m = 2$, a simple vista, de nuevo se tiene luz blanca. En realidad, si se analiza esta zona de luz blanca con algún tipo de espectroscopio, se observan las franjas correspondientes al color seleccionado por el espectroscopio y se habla de *espectro acanalado*.

1.5 Coherencia temporal y visibilidad de las franjas

En la sección anterior se ha visto que la falta de monocromaticidad de las fuentes de luz reales empeora la visibilidad de las franjas de interferencia en comparación con el caso estrictamente monocromático. Ahora nos interesamos por la evaluación de esa visibilidad en función de la monocromaticidad de la fuente, la cual viene medida por su anchura de banda $\Delta \lambda_0$. Veremos que, dada la estrecha relación entre monocromaticidad y coherencia temporal (véase el capítulo 2 de la Óptica Electromagnética, vol.I), existe

una relación aproximada sencilla entre la visibilidad \mathcal{V} , fórmula (1-15), y la longitud de coherencia temporal l_c (longitud de los pulsos) que emite la fuente. Recordemos las expresiones elementales para l_c :

$$l_c = c t_c = \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}, \quad (1-31)$$

donde t_c es el tiempo de coherencia y $\Delta\nu$ la anchura de banda en frecuencia.

Para que las franjas sean bien visibles se requiere que el máximo del orden interferencial m coincida para todas las longitudes de onda contenidas en el espectro, lo cual sólo es posible para luz estrictamente monocromática. Pero podemos aceptar que los máximos “coinciden” si la separación entre ellos para los diferentes colores (para el orden dado m), Δx_m , es mucho menor que el espaciado entre dos órdenes interferenciales adyacentes, l , véase la figura 1-10a. Es decir, usando la fórmula (1-28) para l y la (1-30) que da Δx_m , se tiene la condición:

$$\Delta x_m = m l \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} \ll l \quad \rightarrow \quad m \ll \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda_0}. \quad (1-32)$$

O bien, teniendo en cuenta que la diferencia de camino óptico entre los haces para el orden m es $\Delta L = m \lambda_0$, se puede escribir,

$$\Delta L = m \lambda_0 \ll \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda_0}, \quad (1-33)$$

de modo que con la expresión (1-31) para l_c , se obtiene la condición:

$$\Delta L \ll l_c. \quad (1-34)$$

Es decir, las franjas se verán bien contrastadas si la diferencia de camino óptico entre los haces que interfieren es mucho menor que la longitud de coherencia longitudinal. En la figura 1-11 se ha representado esquemáticamente el retraso ΔL (igual a Δs si $n=1$) con el que un pulso llega a la pantalla respecto a su “gemelo”; si este retraso es mucho menor que la longitud de los pulsos l_c , las franjas se ven bien contrastadas. El trozo inicial de un pulso y el final del otro que no coinciden, se superponen con los trozos análogos de los pulsos anteriores y posteriores a los indicados en la figura. Puesto que los pulsos son emitidos por la fuente al azar, sólo producirán interferencia las partes coincidentes de los pulsos “gemelos”. Para las partes no coincidentes, el término de interferencia I_{12} es nulo y sólo se suman las intensidades.

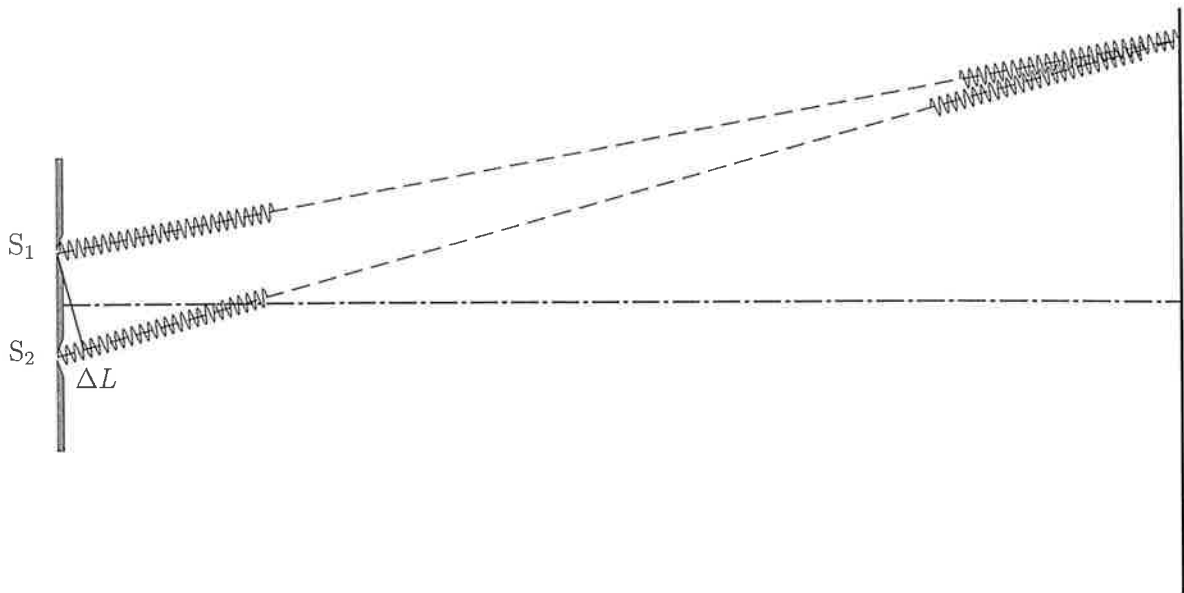


Figura 1-11 Para buena visibilidad de las franjas, los pulsos “gemelos” procedentes de las fuentes secundarias S_1 y S_2 deben estar desplazados un ΔL mucho menor que la longitud de los pulsos.

Ejemplo simple

La argumentación del párrafo anterior permite una evaluación cuantitativa elemental de la visibilidad \mathcal{V} en el siguiente ejemplo sencillo. Supondremos que los pulsos son de amplitud y frecuencia constantes y de longitud l_c . Si, como se indica en la figura 1-12, la diferencia de camino geométrico entre los pulsos gemelos es Δs , sólo la parte $l_c - \Delta s$ de los pulsos producirá interferencia. Esta parte contribuirá a la intensidad total en la

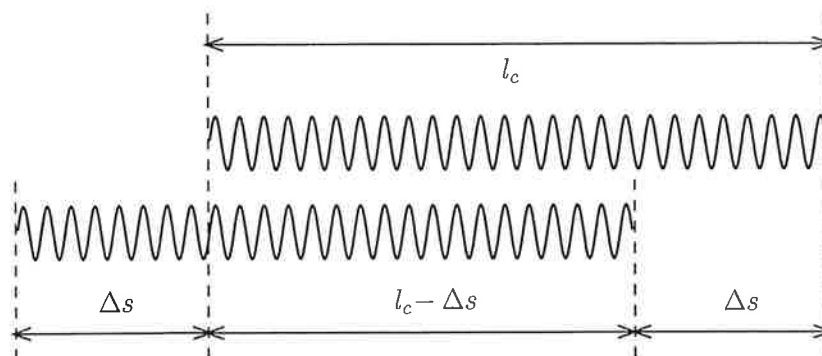


Figura 1-12 Interferencia de dos pulsos gemelos desplazados una distancia Δs .

pantalla con la fracción:

$$I_c = \frac{l_c - \Delta s}{l_c} (I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta) = \frac{l_c - \Delta s}{l_c} I_0 (1 + M \cos \delta). \quad (1-35)$$

Por otro lado, las “colas” de longitud Δs contribuirán con la fracción incoherente:

$$I_{inc} = \frac{\Delta s}{l_c} (I_1 + I_2) = \frac{\Delta s}{l_c} I_0. \quad (1-36)$$

Por tanto, la intensidad total en la pantalla vendrá dada por:

$$I = I_c + I_{inc} = \left(1 - \frac{\Delta s}{l_c}\right) I_0 (1 + M \cos \delta) + \frac{\Delta s}{l_c} I_0 = I_0 \left[1 + \left(1 - \frac{\Delta s}{l_c}\right) M \cos \delta\right], \quad (1-37)$$

de donde se obtienen las siguientes:

$$\begin{aligned} I_{max} &= I_0 \left[1 + M \left(1 - \frac{\Delta s}{l_c}\right)\right] \\ I_{min} &= I_0 \left[1 - M \left(1 - \frac{\Delta s}{l_c}\right)\right]. \end{aligned} \quad (1-38)$$

Entonces la visibilidad viene dada por,

$$\mathcal{V} = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = M \left(1 - \frac{\Delta s}{l_c}\right). \quad (1-39)$$

Para luz estrictamente monocromática se tiene $l_c = \infty$ y se recupera la fórmula (1-16), $\mathcal{V} = M$. En cambio, cuando $l_c = \Delta s$ se tiene $\mathcal{V} = 0$, las franjas desaparecen. Como Δs aumenta a medida que nos alejamos del centro de la pantalla donde vale cero, las franjas presentan visibilidad máxima en $x = 0$ y este valor va decreciendo hasta llegar a $\mathcal{V} = 0$. Por otra parte, esta fórmula permite también obtener l_c , y por tanto el ancho de banda $\Delta \lambda_0$ de la luz, a partir de la sencilla medida experimental de \mathcal{V} y de Δs .

Pulsos reales

El tipo de pulsos elegidos para el ejemplo anterior es sólo una simplificación de la luz emitida por una fuente real. Los pulsos reales presentan irregularidades de diferentes tipos. *i*) Las pérdidas por radiación los hacen amortiguados en vez de constantes. *ii*) El movimiento térmico aleatorio de los átomos emisores respecto al observador provoca variación de frecuencia por efecto Doppler. *iii*) Un átomo emisor puede ser perturbado

por un átomo próximo que inducirá irregularidades aleatorias en la emisión. Por tanto, en un caso real hay que definir longitudes y tiempos de coherencia efectivos mediante promedios adecuados y el cálculo se complica. Pero las ideas básicas siguen siendo válidas, existiendo una relación de transformación de Fourier entre visibilidad de las franjas y coherencia. Esta relación hace posible determinar el ancho del espectro real de emisión de la fuente midiendo experimentalmente la visibilidad.

El primero en reconocer el potencial de este método en espectroscopía fue Michelson, pero para que fuera de utilidad práctica hubo que esperar a la aparición de ordenadores potentes, capaces de calcular la transformada de Fourier numéricamente con suficiente rapidez. Actualmente existen equipos comerciales basados en este principio, llamados *espectrofotómetros por transformación de Fourier*, que se usan principalmente en la región infrarroja del espectro. El poder de resolución espectral está determinado por el valor máximo que se alcanza en la diferencia de camino Δs , por lo que en vez de interferómetros tipo Young se usan del tipo Michelson que se describen en la sección 2.3 del capítulo siguiente.

1.6 Fuentes extensas: coherencia espacial

En esta sección vamos a considerar la influencia que tiene sobre la visibilidad de las franjas el hecho de que las fuentes reales de luz no sean estrictamente puntuales, como se ha supuesto hasta ahora, sino de extensión finita. Veremos que a medida que aumenta la extensión de la fuente, en general disminuye la visibilidad.

Tomemos como modelo simplificado de fuente extensa aquella formada por un número muy grande de emisores atómicos que se pueden considerar puntuales y que emiten de forma independiente unos de otros (*mútuamente incoherentes*). La intensidad en cualquier punto iluminado por esta fuente será la suma de las intensidades procedentes de todos los emisores puntuales individuales. Al incidir la luz procedente de esta fuente extensa sobre los orificios S_1 y S_2 del dispositivo de Young (véase la Fig. 1-5), se producen dos efectos diferentes según se considere la extensión a lo largo del eje Y perpendicular a la línea S_1-S_2 o a lo largo del eje X paralelo a dicha línea.

1.6.1. Uso de rendijas

Para aclarar el efecto que produce la extensión de la fuente a lo largo del eje Y , consideremos primero que el emisor puntual S se encuentra desplazado respecto a la posición $[x, y] = [0, 0]$ a lo largo de dicho eje Y (perpendicular a S_1-S_2). En la figura 1-13 se han representado las franjas de interferencia producidas por los emisores puntuales $S'[0, y']$ y $S''[0, y'']$ junto con las producidas por el emisor original S . Las franjas debidas a S' y a S'' aparecen en la pantalla también desplazadas en la dirección Y , pero sus posiciones a lo largo del eje X se mantienen idénticas. Por tanto, si tenemos una fuente extensa en la dirección Y , los infinitos emisores puntuales producirán en la pantalla infinitas series de franjas más o menos desplazadas en esa dirección, pero con sus máximos y mínimos exactamente coincidentes. La superposición de todas estas franjas es incoherente, por lo que se sumarán sus intensidades y se observarán más fácilmente.

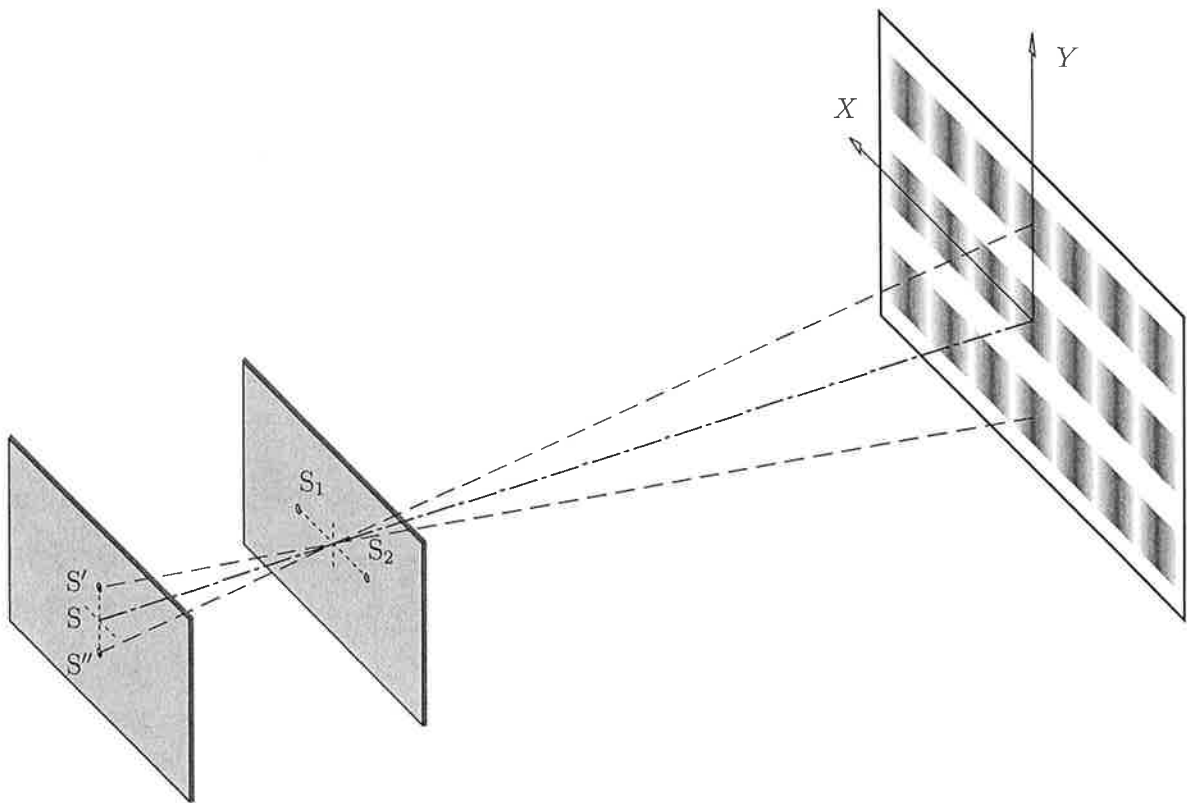


Figura 1-13 Cuando la fuente puntual S se desplaza a lo largo del eje Y (perpendicularmente a la línea S_1-S_2), las franjas de interferencia también se desplazan a lo largo del eje Y , manteniendo sus posiciones idénticas a lo largo del eje X .

Es fácil deducir que la extensión de los orificios “puntuales” S_1 y S_2 a lo largo de la misma dirección Y produce un efecto similar. Por esta razón es muy recomendable el uso de *rendijas* a lo largo de la dirección Y en el experimento de Young, a condición de que la perpendicularidad al eje de las mismas sea lo suficientemente buena.

1.6.2 Anchura de las rendijas y visibilidad

Análogamente al caso anterior, para aclarar el efecto que produce la extensión de la fuente a lo largo del eje X , consideremos que un emisor puntual S se encuentra desplazado a lo largo de dicho eje respecto a la posición $[x, y] = [0, 0]$ (paralelamente a S_1-S_2 , véase la Fig. 1-14). En la nueva posición $S'[x', 0]$, las franjas de interferencia aparecen en la pantalla desplazadas en la dirección X , aunque el espaciado entre ellas sigue siendo el mismo. Por tanto, si tenemos una fuente extensa en la dirección X , los infinitos emisores puntuales producirán en la pantalla infinitas series de franjas más o menos desplazadas en esa dirección. Igual que en el caso anterior, se sumarán las intensidades por proceder de fuentes incoherentes, pero ahora los máximos y mínimos no coinciden y se pierde visibilidad porque la intensidad de los mínimos ya no es cero.

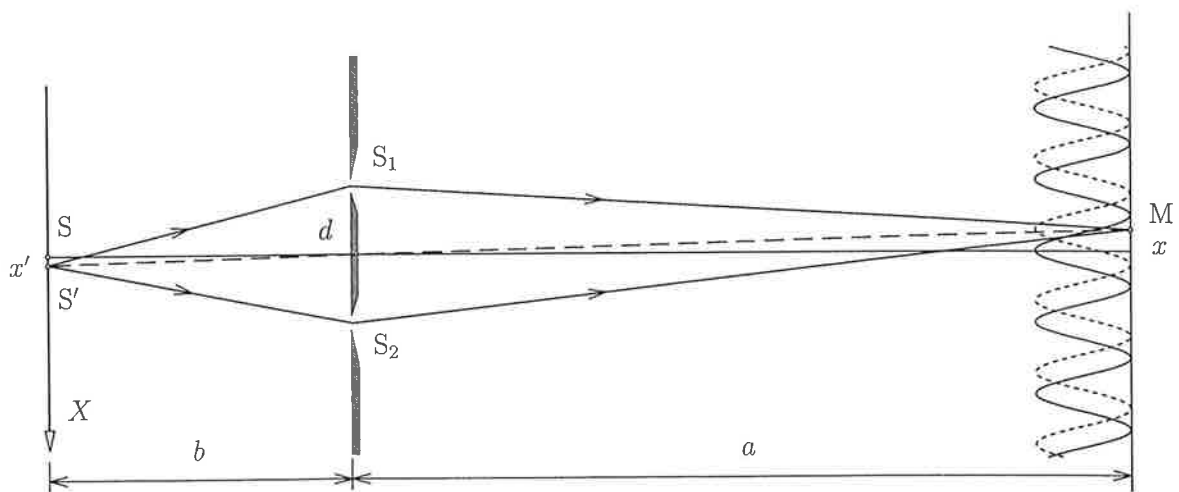


Figura 1-14 Cuando la fuente puntual S se desplaza a lo largo del eje X (paralelamente a la línea S_1-S_2), las franjas de interferencia también se desplazan a lo largo del eje X ,

1.6.3 Cálculo de la visibilidad

Para calcular la visibilidad de las franjas producidas por una fuente que se extiende una longitud e paralelamente a la dirección S_1-S_2 , se debe calcular la intensidad en un punto x de la pantalla como suma (superposición incoherente) de las intensidades $dI(x, x')$ con que contribuye cada elemento "puntual" de extensión dx' situado en la posición x' de la fuente (Fig. 1-14). Para obtener dI hay que aplicar la fórmula (1-12) para dos fuentes iguales,

$$dI(x, x') = 2 i_1 dx' [1 + \cos \delta'(x, x')], \quad (1-40)$$

donde $i_1 dx'$ es la intensidad que, procedente del elemento dx' , llega a la pantalla a través de cualquiera de los orificios (S_1 o S_2); i_1 es proporcional a la intensidad que emite la fuente por unidad de longitud (a lo largo de X), magnitud que se supone uniforme. Por su parte, δ' viene determinada por la diferencia de camino óptico $\Delta L'$ entre los dos rayos (véase la Fig. 1-14), que se obtiene de forma análoga a la fórmula (1-25) y se escribe:

$$\Delta L'(x, x') = n [(\overline{S_2 M} - \overline{S_1 M}) + (\overline{S'_2 S_2} - \overline{S'_1 S_1})] \simeq \frac{n x d}{a} - \frac{n x' d}{b}, \quad (1-41)$$

con lo que la diferencia de fase viene dada por:

$$\delta'(x, x') = \frac{2\pi}{\lambda_0} n d \left(\frac{x}{a} - \frac{x'}{b} \right). \quad (1-42)$$

Finalmente, la intensidad total será la integral de (1-40):

$$I(x) = \int_{-e/2}^{e/2} 2 i_1 \left\{ 1 + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda_0} n d \left(\frac{x}{a} - \frac{x'}{b} \right) \right] \right\} dx' = 2 i_1 e \left[1 + \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \cos \delta(x) \right], \quad (1-43)$$

donde se ha hecho,

$$\alpha = \frac{\pi n d}{\lambda_0 b} e, \quad \delta(x) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{n d}{a} x. \quad (1-44)$$

A partir de esta función intensidad se obtienen los valores I_{\max} (cuando $\cos \delta = 1$) e I_{\min} (cuando $\cos \delta = -1$):

$$I_{\max} = 2 i_1 e \left(1 + \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \right); \quad I_{\min} = 2 i_1 e \left(1 - \frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} \right) \quad (1-45)$$

y de éstos se obtiene inmediatamente la visibilidad de las franjas:

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{|\operatorname{sen} \alpha|}{\alpha} = \frac{\left| \operatorname{sen} \frac{\pi n e d}{\lambda_0 b} \right|}{\frac{\pi n e d}{\lambda_0 b}}. \quad (1-46)$$

La función (1-46) resulta ser la transformada espacial de Fourier de la fuente extensa y, como veremos en el capítulo 4, coincide con la distribución de luz dada por la difracción en una rendija idéntica a la fuente de luz. Este resultado no es casual; en realidad es válido para fuentes/rendijas más complejas que la del ejemplo; se conoce como *teorema de Van Cittert-Zernike* y se demuestra en el apéndice 1.8.2.

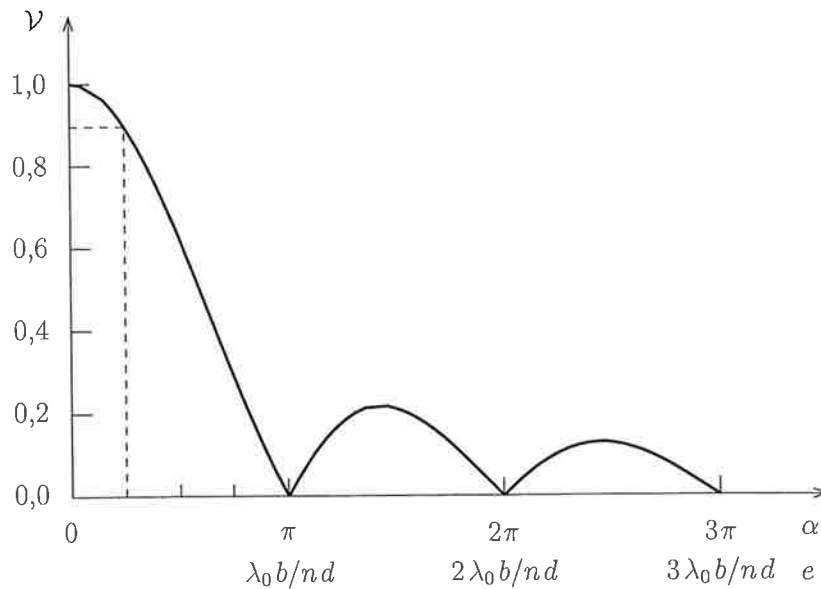


Figura 1-15 Visibilidad de las franjas de Young en función de la extensión de la fuente e (en la dirección S_1 - S_2).

1.6.4 Coherencia espacial

La función (1-46) se ha representado en la figura 1-15. Se puede observar que la visibilidad es máxima para $e \rightarrow 0$ y tiene un primer cero para:

$$\alpha = \frac{\pi n d}{\lambda_0 b} e = \pi. \quad (1-47)$$

Esta función nos permite introducir el parámetro *longitud de coherencia espacial* o *transversal* l_t de un frente de onda como la distancia sobre el frente de onda (perpendicular a la propagación) a la que las rendijas de Young producen franjas de una visibilidad prefijada. Si tomamos por convenio el valor $\mathcal{V}=0,9$ se tiene:

$$\mathcal{V} = 0,9 \quad \rightarrow \quad (\alpha = \pi/4) \quad \rightarrow \quad l_t = \frac{\lambda_0 b}{4 n e}. \quad (1-48)$$

Otros convenios toman \mathcal{V} igual a $1/2$, $1/e$, ó 0 (para $\alpha=\pi$). Como ejemplo, la longitud de coherencia espacial de un frente de onda de la luz solar resulta:

$$l_t \sim \frac{0,5 \mu\text{m} \cdot 1,5 \times 10^8 \text{ Km}}{4 \cdot 1,5 \cdot 10^6 \text{ Km}} \sim 10 \mu\text{m}. \quad (1-49)$$

1.6.5 Interferómetro estelar de Michelson

De acuerdo con la expresión (1-46), la visibilidad de las franjas depende de la extensión de la fuente e , de su distancia a las rendijas b y de la separación entre las rendijas d , además de la λ_0 de la luz usada. Por tanto, midiendo \mathcal{V} se puede determinar uno de estos parámetros si se conocen los restantes. Así, si se mide la visibilidad de las franjas producidas por una estrella cuya distancia a la Tierra se conoce, usando unas rendijas de espaciado d , se puede determinar el tamaño de la estrella e , que en general es demasiado pequeño para que se pueda resolver con los telescopios ordinarios. Fizeau fue el primero en proponer la idea en 1868, pero sólo fue de utilidad práctica cuando Michelson en 1920 la mejoró y demostró su capacidad mediante el instrumento que él construyó, el llamado *interferómetro estelar de Michelson*.

El interferómetro estelar de Michelson es un dispositivo del tipo ilustrado en la figura 1-7 (experimento de Young) en el que la lente es sustituida por el objetivo de un telescopio (Fig. 1-16). Además, para mejorar su resolución, la distancia entre las rendijas se hace mayor con la ayuda de cuatro espejos. Como se observa en la figura 1-16, la diferencia de camino Δs entre los rayos procedentes de los bordes de la estrella, viene determinada por la distancia entre los espejos exteriores en vez de por la separación entre las rendijas. Estos espejos son móviles, de forma que se puede variar el valor de la separación "efectiva" d . Si, partiendo de un valor de d pequeño con el que se observan

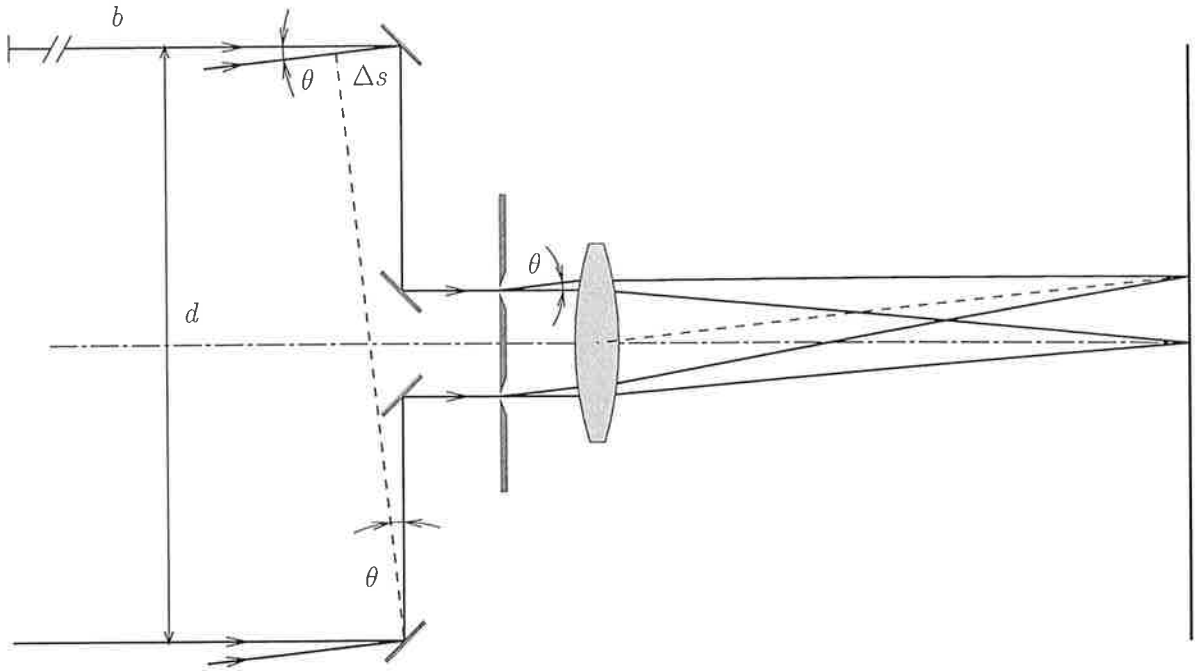


Figura 1-16 Esquema del interferómetro estelar de Michelson. Los espejos exteriores son móviles de forma que se puede variar la separación “efectiva” d entre las rendijas.

franjas, se aumenta d hasta que éstas desaparecen, $\mathcal{V}=0$, se tiene la condición (1-47), de donde se puede despejar el tamaño de la estrella,

$$e = \frac{\lambda_0 b}{d}; \quad (1-50)$$

se ha tomado $n=1$ para el espacio interestelar. Por tanto, la resolución angular $\theta=e/b$ que se consigue es:

$$\theta \simeq \frac{\lambda_0}{d}. \quad (1-51)$$

En el capítulo 4 veremos que un telescopio ordinario, trabajando en el límite de resolución dado por la difracción, consigue una resolución angular de

$$\theta_T \simeq 1,22 \frac{\lambda_0}{d_T}, \quad (1-52)$$

siendo d_T el diámetro del objetivo. En el montaje que hizo Michelson de su interferómetro sobre el telescopio del Monte Palomar de $d_T=5$ m, los espejos exteriores se encontraban a una distancia $d=15$ m. Por tanto, la mejora de resolución es del orden de un factor 4; $\theta \sim \theta_T/4$. El primer diámetro estelar que se midió fue el de la gigante roja Betelgeuse,

que subtiende un ángulo $\theta = 0,047^\circ$, y da un diámetro unas 300 veces mayor que el del Sol. Posteriormente se han medido los diámetros de otros objetos estelares y planetarios mediante este procedimiento.

1.7 *Comentarios finales*

Los conceptos esbozados en este capítulo acerca de la coherencia temporal y espacial por medio de experimentos interferenciales, ponen de manifiesto la complejidad de los mismos en el caso de fuentes reales en las que se tiene coherencia parcial. La intuición llevó a Young a utilizar una fuente primaria S tan puntual como le era posible ($e \simeq 0$ en la Fig. 1-15), de modo que conseguía una elevada coherencia espacial sobre el frente de onda que incidía sobre las rendijas. En estas condiciones, la visibilidad de las franjas sólo está limitada por la monocromaticidad de un emisor individual. Por otra parte, una situación análoga se tiene con una fuente extensa en la que cada emisor es idealmente monocromático, y por tanto con elevada coherencia temporal, pero emitiendo de forma independiente con respecto a los otros (numerosos) emisores de la fuente. En este caso la visibilidad sólo está limitada por la extensión de la fuente, puesto que se tiene superposición estadística de las ondas procedentes de todos los emisores. En general, hemos visto que las ondas reales tienen limitada tanto la coherencia espacial como la temporal. Una descripción rigurosa del fenómeno de la coherencia parcial sólo es posible dentro del marco de la teoría general de los procesos estocásticos, debido a la naturaleza esencialmente estocástica del proceso de emisión de la radiación.

1.8 *Apéndices*

1.8.1 *Análisis del experimento de Young con luz cuasimonocromática*

Para analizar de forma cuantitativa el efecto de la no monocromaticidad de la fuente sobre las franjas de Young, debemos considerar la interferencia de dos pulsos de longitud finita l_c , procedentes de las fuentes secundarias S_1 y S_2 , que están desfasados en un tiempo

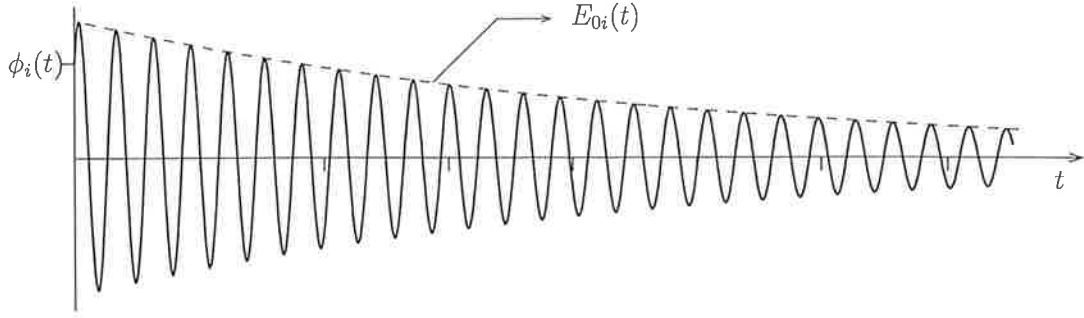


Figura 1-A1 Parámetros típicos de un pulso luminoso emitido por un sistema atómico.

$\tau = \Delta s/v$ debido a la diferencia de camino Δs entre ambos recorridos. Por tanto, las dependencias temporales de los campos (considerados escalares) vendrán representadas por las funciones (1-1) escritas del modo siguiente:

$$\begin{aligned} E_1(t) &= E_{\omega_1}(t) e^{-i\omega t} = E_{01}(t) e^{i\phi_1(t)} e^{-i\omega t} \\ E_2(t - \tau) &= E_{\omega_2}(t - \tau) e^{-i\omega(t-\tau)} = E_{02}(t - \tau) e^{i\phi_2(t-\tau)} e^{-i\omega(t-\tau)}, \end{aligned} \quad (1-A1)$$

donde se supone que las amplitudes $E_{0i}(t)$ y las fases $\phi_i(t)$ varían muy poco en un tiempo igual al periodo de la onda $T = 2\pi/\omega$. En la figura 1-A1 se ha ilustrado uno de estos pulsos típicos. La función intensidad a que da lugar la interferencia de tales pulsos, vendrá determinada por el valor medio del cuadrado del campo real resultante, es decir:

$$\begin{aligned} I &= c\varepsilon_0 \langle [E_{1\Re}(t) + E_{2\Re}(t - \tau)]^2 \rangle = \\ &= c\varepsilon_0 \{ \langle [E_{1\Re}(t)]^2 \rangle + \langle [E_{2\Re}(t - \tau)]^2 \rangle + 2 \langle E_{1\Re}(t) E_{2\Re}(t - \tau) \rangle \}, \end{aligned} \quad (1-A2)$$

donde los subíndices \Re indican los campos reales. Si, como es el caso ordinario, suponemos que el campo óptico es estacionario, es decir se cumple que:

$$\langle [E_{i\Re}(t)]^2 \rangle = \langle [E_{i\Re}(t - \tau)]^2 \rangle \quad (1-A3)$$

y la intensidad I permanece constante, la expresión anterior se puede escribir,

$$I = I_1 + I_2 + I_{12}, \quad (1-A4)$$

donde el término de interferencia ahora toma la forma:

$$I_{12} = c\varepsilon_0 2 \langle E_{1\Re} E_{2\Re} \rangle = c\varepsilon_0 \frac{1}{2} \langle (E_1 + E_1^*) (E_2 + E_2^*) \rangle. \quad (1-A5)$$

En esta expresión se han omitido las dependencias temporales para simplificar la escritura. Haciendo explícita la expresión del valor medio, se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle (E_1 + E_1^*) (E_2 + E_2^*) \rangle &= \\ &= \langle E_{\omega_1} E_{\omega_2} e^{-i2\omega t} e^{i\omega\tau} + E_{\omega_1} E_{\omega_2}^* e^{-i\omega\tau} + E_{\omega_1}^* E_{\omega_2} e^{i\omega\tau} + E_{\omega_1}^* E_{\omega_2}^* e^{i2\omega t} e^{-i\omega\tau} \rangle. \end{aligned} \quad (1-A6)$$

Si en esta expresión se hace un primer promedio en un tiempo $T=2\pi/\omega$ (muy pequeño en comparación con la duración de los pulsos $t_c=l_c/v$), las amplitudes y fases se pueden considerar constantes y los términos primero y último se anulan. Además, como el tercer término es el conjugado del segundo, el término de interferencia se puede escribir finalmente:

$$I_{12} = c\varepsilon_0 \Re\{\langle E_{\omega_1} E_{\omega_2}^* e^{-i\omega\tau} \rangle\} = c\varepsilon_0 \Re\{\langle E_1 E_2^* \rangle\}. \quad (1-A7)$$

Es conveniente escribir I_{12} usando una función compleja. Por ello se introduce la llamada *función de correlación* o *coherencia mutua* definida por:

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(\tau) &= c\varepsilon_0 \langle E_1(t) E_2^*(t-\tau) \rangle = c\varepsilon_0 \langle E_{\omega_1}(t) E_{\omega_2}^*(t-\tau) e^{-i\omega\tau} \rangle \\ &= c\varepsilon_0 \left[\lim_{t' \rightarrow \infty} \frac{1}{t'} \int_0^{t'} E_{\omega_1}(t) E_{\omega_2}^*(t-\tau) dt \right] e^{-i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (1-A8)$$

Asimismo se introduce el llamado *grado complejo de coherencia* como la función:

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{2\sqrt{I_1 I_2}} e^{i\omega\tau} = \frac{\langle E_{\omega_1} E_{\omega_2}^* \rangle}{2\sqrt{I_1 I_2}}. \quad (1-A9)$$

Esta última se ha normalizado al dividir por $2\sqrt{I_1 I_2}$, y en ella se ha eliminado el factor oscilante $e^{-i\omega\tau}$ que es muy rápido por el elevado valor de ω .

Utilizando estas definiciones, el término de interferencia se puede escribir:

$$I_{12} = \Re\{\Gamma_{12}(\tau)\} = 2\sqrt{I_1 I_2} \Re\{\gamma_{12}(\tau) e^{-i\omega\tau}\}. \quad (1-A10)$$

O bien, separando el módulo y el argumento de $\gamma_{12}(\tau) = |\gamma_{12}(\tau)| e^{-i\delta(\tau)}$, se tiene,

$$\Re\{\gamma_{12}(\tau) e^{-i\omega\tau}\} = |\gamma_{12}(\tau)| \Re\{e^{-i\delta(\tau)} e^{-i\omega\tau}\}, \quad (1-A11)$$

con lo que finalmente la intensidad (1-A4) se escribe:

$$I = I_0 \{1 + M |\gamma_{12}(\tau)| \cos[\omega\tau + \delta(\tau)]\} \quad (1-A12)$$

y de esta última expresión se tiene inmediatamente la visibilidad,

$$\mathcal{V} = M |\gamma_{12}(\tau)|. \quad (1-A13)$$

En general $0 < |\gamma_{12}(\tau)| < 1$. Sólo para luz estrictamente monocromática, para la que $E_{\omega_1}, E_{\omega_2}$ son constantes, se tiene coherencia total:

$$|\gamma_{12}(\tau)| = \frac{|E_{\omega_1} E_{\omega_2}^*|}{2\sqrt{I_1 I_2}} = 1. \quad (1-A14)$$

1.8.2 Teorema de Van Cittert-Zernike

Capítulo 2

Interferencias por reflexiones en láminas

2.1 *Interferencia de dos rayos en láminas de caras plano-paralelas*

2.1.1 Obtención de rayos coherentes por división de amplitud

En el capítulo anterior se comentó que un hecho clave para el éxito del experimento de Young es la *división del frente de onda* por medio de los dos orificios S_1, S_2 (véase la Fig. 1-5). Si los orificios y la fuente S son suficientemente puntuales, los pulsos de luz que salen de S_1 y S_2 son “gemelos” y tienen un grado de coherencia muy elevado cuando la diferencia de caminos ópticos es nula.

Otro procedimiento para conseguir dos haces de luz muy coherentes consiste en producir los pulsos “gemelos” por *división de la amplitud* de la onda, mediante la reflexión/transmisión en una superficie que separa dos medios diferentes, figura 2-1a. El pulso reflejado y el transmitido sólo se diferencian en la amplitud y en un factor de fase constante, de 0 ó π en el caso de reflexión dieléctrica, y entre 0 y π en el caso de reflexión metálica (confróntense los capítulos 9 y 10 de *Óptica electromagnética vol. I*). Existen bastantes configuraciones que usan este método; la figura 2-1b muestra una de las más comunes, la que usa una lámina de material transparente con sus caras plano-paralelas. En esta configuración, se divide la amplitud de un haz en la primera cara para generar los dos haces cuyos caminos ópticos se desean hacer diferentes para que después

interfieran. El rayo **1** es reflejado directamente hacia arriba en el punto A de la primera cara y no atraviesa la lámina; el rayo **2** es reflejado en el punto B de la segunda cara y transmitido en el C de la primera, atravesando dos veces la lámina (camino óptico mayor) y saliendo paralelo al **1**. Al ser paralelos, los rayos **1** y **2** interfieren en el infinito, aunque la figura de interferencia se puede observar de forma conveniente localizada en el plano focal de una lente como ilustra la figura 2-1b. Si la lámina es de vidrio ($n \sim 1,5$), las fórmulas de Fresnel nos dicen que la fracción de intensidad reflejada en cada cara es $\sim 4\%$ para incidencia próxima a la normal, lo que implica que los rayos **1** y **2** tienen aproximadamente la misma intensidad y la visibilidad de las franjas puede ser alta.

2.1.2 Cálculo de la diferencia de fase

Para calcular la diferencia de fase de los rayos que interfieren en la configuración de la figura 2-1b, considérese el frente de onda CN que comparten los rayos de salida **1** y **2** (perpendicular a ambos). Entonces, si n' es el índice de la lámina y n el del medio que la rodea, la diferencia de camino óptico entre ellos viene dada por:

$$\Delta L = n'(\overline{AB} + \overline{BC}) - n\overline{AN}. \quad (2-1)$$

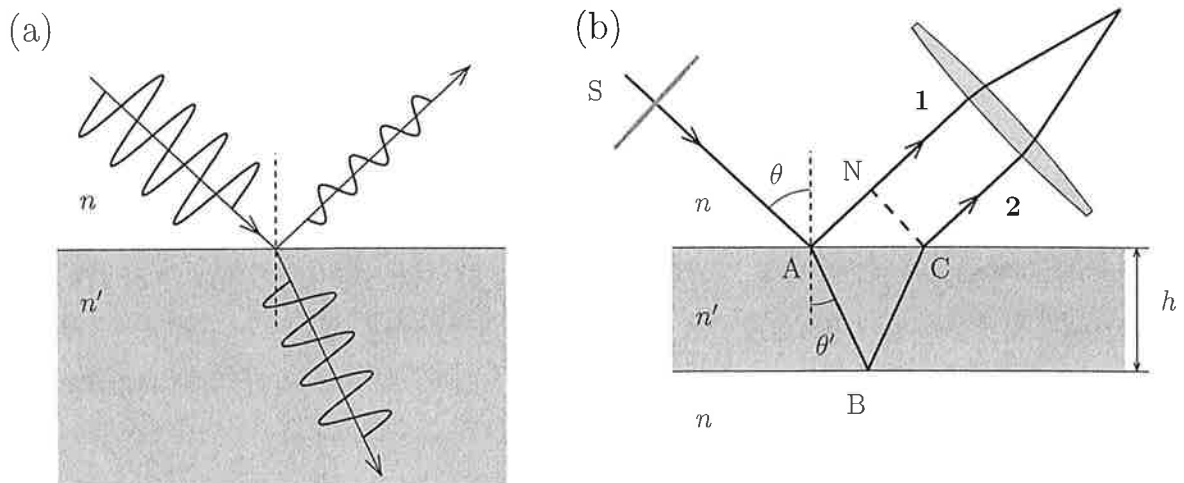


Figura 2-1 (a) Generación de dos pulsos de luz idénticos por división de la amplitud de un pulso incidente sobre una superficie de discontinuidad entre dos dieléctricos. (b) Interferencia de dos rayos de luz reflejados en cada una de las caras de una lámina plano-paralela; las franjas se localizan en el infinito y se pueden observar con comodidad en el plano focal de una lente.

Por otra parte, si h es el grosor de la lámina y tenemos en cuenta la geometría de la figura, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \frac{h}{\cos \theta'}, \quad (2-2)$$

$$\overline{AN} = \overline{AC} \sin \theta = 2 h \tan \theta' \sin \theta; \quad (2-3)$$

además, se tiene que cumplir la ley de la refracción:

$$n' \sin \theta' = n \sin \theta. \quad (2-4)$$

Sustituyendo ahora las anteriores en (2-1), se obtiene la siguiente expresión para la diferencia de camino óptico:

$$\Delta L = 2 n' h \cos \theta' \quad (2-5)$$

y la diferencia de fase asociada $\delta_{\Delta L} = 2\pi \Delta L / \lambda_0$ viene dada por:

$$\delta_{\Delta L} = \frac{4\pi}{\lambda_0} n' h \cos \theta'. \quad (2-6)$$

Además de esta diferencia de fase, hay que contabilizar la que se origina en las reflexiones en las dos caras de la lámina. Como una reflexión es “dura” (la de arriba si $n < n'$) y la otra es “blanda”, de acuerdo con las fórmulas de Fresnel para la reflexión en dieléctricos, la diferencia de fase es π . Por tanto, la diferencia de fase final entre los rayos 1 y 2 será:

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n' h \cos \theta' \pm \pi, \quad (2-7)$$

donde se aplica el signo (+) si $n < n'$ y el signo (−) en caso contrario. De acuerdo con (1-10), la condición de intensidad máxima será $\delta = m 2\pi$ y la de intensidad mínima $\delta = (2m + 1)\pi$, es decir:

$$2 n' h \cos \theta' \pm \frac{\lambda_0}{2} = m \lambda_0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots & (\text{máx}) \\ m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots & (\text{mín}) \end{cases} \quad (2-8)$$

2.1.3 Anillos de igual inclinación

Las expresiones anteriores indican que la diferencia de fase entre los rayos que interfieren sólo depende del ángulo θ del rayo incidente. Debido a esta propiedad, las franjas

de interferencia que aparecen se llaman franjas de *igual inclinación*. En particular, si se utiliza una fuente de luz extensa, todos los rayos de la fuente que formen el mismo ángulo con la normal a la lámina, originarán pares de rayos para los que la diferencia de fase entre los dos elementos del par es la misma. Como todos los pares paralelos van a cortarse al mismo punto del plano focal de la lente y son incoherentes, las intensidades de todos los pares se suman, y en consecuencia el uso de una fuente extensa aumenta mucho la visibilidad de las franjas en vez de disminuirla. Esta es una importante ventaja de las láminas de caras plano-paralelas con respecto al dispositivo de Young (en el que la fuente tiene que ser casi puntual) para muchas aplicaciones de las interferencias. Por otra parte, para que la visibilidad de las franjas sea elevada, también se tiene que cumplir la condición (1-34), $\Delta L \ll l_c$, (la longitud de coherencia temporal de los pulsos tiene que ser mucho mayor que la diferencia de camino óptico). Hay que señalar que esta condición es mucho más restrictiva aquí que en el dispositivo de Young; en este caso ΔL viene determinado por (2-5) donde h es típicamente del orden de algunos milímetros (se exceptúan las películas delgadas en donde $h \sim 1 \mu\text{m}$), mientras que para el dispositivo de Young el Δs dado por la fórmula (1-19) es del orden de algunas micras. Por tanto, para que la visibilidad sea similar, con el dispositivo de la figura 2-1b necesitamos que l_c sea unos tres órdenes de magnitud superior.

En la mayoría de los usos prácticos la lente auxiliar se coloca paralelamente a la lámina como se indica en la figura 2-2. Con esta configuración existe simetría de revolución alrededor del eje óptico de la lente (perpendicular a la lámina), y, por tanto, cada ángulo θ lleva asociado un cono de rayos para los que la condición de interferencia es la misma. Por esta razón, las franjas de interferencia se observan en el plano focal de la lente en forma de *anillos* concéntricos alrededor del foco de la misma. Debido a que el orden interferencial m en (2-8) es proporcional a $\cos \theta'$, el orden más alto corresponde a $\theta' = 0$ (incidencia normal), es decir, al centro de los anillos donde se cumplirá:

$$2n'h \pm \frac{\lambda_0}{2} = (m_1 + e) \lambda_0 \quad (2-9)$$

en el último miembro de la ecuación anterior, m_1 es un número entero y e un número comprendido entre 0 y 1. Sólo en el caso en que e sea igual a 0 ó 1/2, el centro de los anillos es máximo o mínimo de intensidad; para el resto de los valores el centro tendrá una

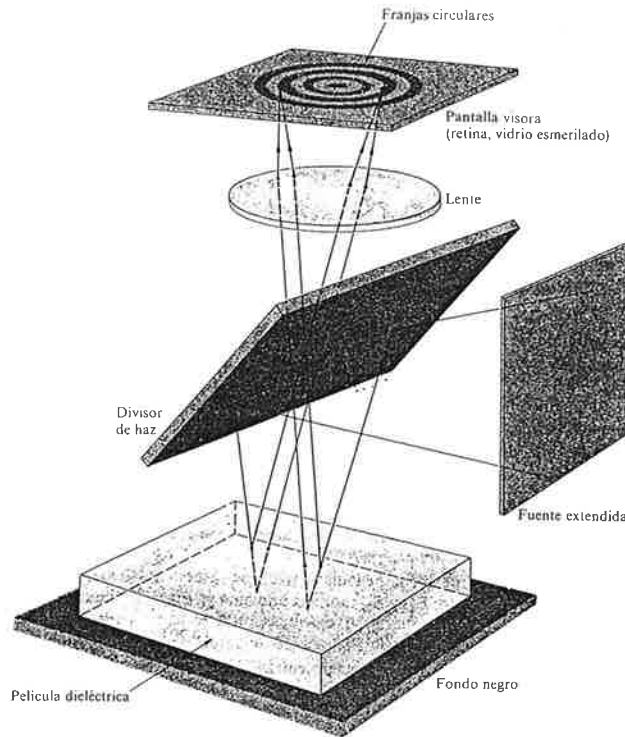


Figura 2-2 Esquema del dispositivo para observar *anillos* de interferencia por reflexión en una lámina de caras plano-paralelas.

intensidad intermedia. Debido a que $h \gg \lambda_0$, el orden interferencial $m_1 \simeq 2n'h/\lambda_0$ es alto, típicamente entre 1.000 y 100.000; en cambio, en el dispositivo de Young, típicamente se tiene $m \lesssim 10$.

2.1.4. Aplicación

La fórmula (2-8) relaciona el grosor h y el índice de refracción n' de la lámina de caras plano-paralelas con la longitud de onda λ_0 . Por tanto, se puede utilizar para determinar uno de estos parámetros en función de los otros. Si se consideran dos anillos cuyos órdenes interferenciales se diferencian en $\Delta m = m_1 - m_2$, de (2-8) se tiene:

$$2n'h(\cos\theta'_{m_1} - \cos\theta'_{m_2}) = \lambda_0 \Delta m. \quad (2-10)$$

Por tanto, determinando experimentalmente los ángulos $\theta'_{m_1}, \theta'_{m_2}$ (véase la Fig. 2-3) a partir de $\tan\theta_m = r_m/f'$, donde r_{m_1}, r_{m_2} son los radios de los anillos y f' es la focal de

la lente, usando la ley de la refracción (2-4) y sustituyendo en la anterior, se obtiene la relación buscada.

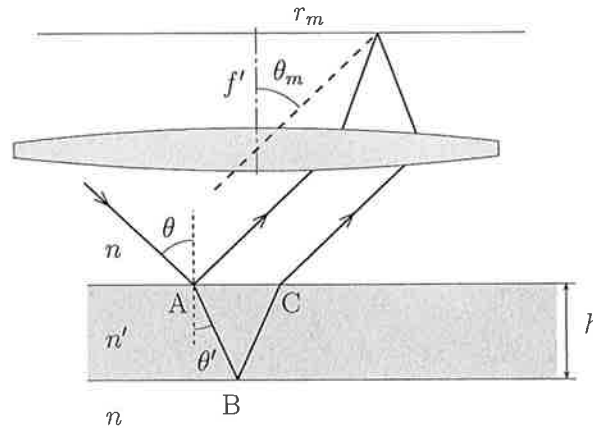


Figura 2-3 Ilustración de la relación entre el radio de los anillos, la distancia focal y el ángulo del rayo.

2.1.5 Anillos con luz transmitida

En la figura 2-1b se han considerado solamente los rayos procedentes de la primera reflexión en cada una de las caras de la lámina. Si, como ilustra la figura 2-4, se considera de un lado el rayo transmitido en B y de otro el reflejado en C que luego es transmitido en D, se obtiene un par de rayos paralelos transmitidos hacia abajo en la segunda cara, cuya interferencia se observa también en el infinito o en el plano focal de una lente como se indica en la figura. En este caso, sin embargo, la intensidad del rayo transmitido sin reflexiones es $\sim 92\%$ y la del que ha sufrido dos reflexiones es $\sim 0.1\%$, lo que implica que la visibilidad de las franjas es necesariamente muy baja de acuerdo con la definición (1-15). Si la lente se coloca paralelamente a la lámina estas franjas también son anillos concéntricos en el plano focal de la lente y con centro en el foco de la misma. Por otra parte, la diferencia de fase δ entre los dos rayos que interfieren en una franja viene dada por la expresión (2-6) en vez de por la (2-7), puesto que ahora las dos reflexiones implicadas son “blandas” y no hay que añadir el término $\pm\pi$. Esta diferencia con respecto a la luz reflejada hace que unos anillos sean complementarios de los otros (un ángulo dado que produce máximo en un caso corresponde a un mínimo en el otro).

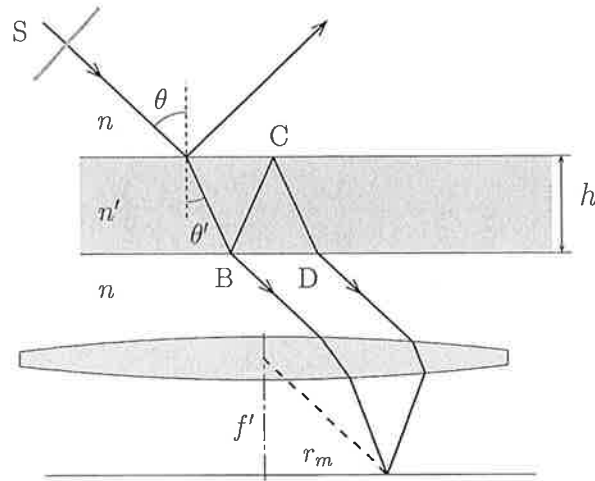


Figura 2-4 Observación de interferencias por transmisión en una lámina plano-paralela.

Más compleja es la posibilidad de interferencia de rayos múltiples como consecuencia de múltiples reflexiones en las dos caras de la lámina, pero esa situación se discute en detalle en la sección 2.4.

2.2 Franjas en películas delgadas

2.2.1 Láminas de espesor variable

A menos que se utilicen técnicas de pulido adecuadas, es difícil conseguir láminas de caras plano-paralelas que mantengan la planitud y el paralelismo (el espesor) en una extensión grande. En el caso en que ambas caras no son paralelas, como se ilustra en la figura 2-5, se puede producir interferencia en un cierto punto P entre dos rayos que emergen de un punto de la fuente con direcciones diferentes. En realidad, este tipo de interferencia puede ocurrir para cualquier posición de P en el espacio, por lo que son franjas no localizadas (obviamente, este mismo mecanismo también se presenta en las láminas de caras plano-paralelas). Pero debido a que la diferencia de camino óptico ahora varía de unos puntos a otros de la fuente extensa S, en P se mezclan infinitos máximos y mínimos y la visibilidad se hace rápidamente cero a medida que la fuente deja de ser puntual. Por esta razón es una situación que carece de interés en términos generales.

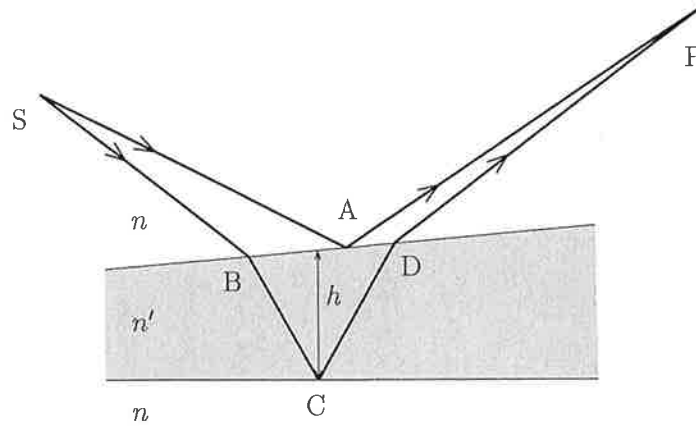


Figura 2-5 Interferencia de dos rayos en una lámina cuyas caras forman un cierto ángulo: los rayos que interfieren proceden de dos rayos diferentes de la fuente.

2.2.2 Franjas de igual espesor

Existen, sin embargo, ciertas condiciones bajo las cuales se pueden observar interferencias en láminas de espesor variable con fuentes extensas. Las condiciones son muy restrictivas, pero se cumplen aceptablemente bien en ciertas situaciones de interés. Si el punto P está situado muy cerca de la primera superficie de la lámina y los puntos A, B y D son prácticamente coincidentes, la diferencia de camino para rayos procedentes de distintos puntos de la fuente es esencialmente la misma. Esto sólo es posible cuando tanto el ángulo entre las caras como el grosor de la lámina son suficientemente pequeños ($\alpha \lesssim 1^\circ$; h no muy superior a λ , de ahí el nombre de *películas delgadas*) y la incidencia de la luz es muy próxima a la normal. En estas condiciones, la diferencia de camino óptico en el punto P “de la lámina” viene dado con buena aproximación por la (2-5) tomando $\overline{\cos \theta'} \simeq 1$, puesto que $\cos \theta'$ se encuentra alrededor de un máximo donde sus pequeñas variaciones son de segundo orden, es decir:

$$\Delta L \simeq 2n'h. \quad (2-11)$$

Al cambiar de un punto P a otro de la película, el valor de $\overline{\cos \theta'}$ sigue siendo igual a 1, y ΔL sólo depende de h . Por esta razón, las franjas de interferencia que aparecen se llaman *franjas de igual espesor*.

Bajo estas condiciones, por tanto, se observan franjas localizadas en la película. Para observarlas en una pantalla, se puede usar una lente que forme una imagen real de las franjas sobre la pantalla, y la región pequeña se puede seleccionar mediante un diafragma. También se pueden observar directamente con el ojo desnudo, en cuyo caso la imagen se forma sobre la retina y el propio iris hace de diafragma.

A partir de la expresión (2-11), la condición de máximo/mínimo se puede escribir con buena aproximación como:

$$2n'h \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m = 0, 1, 2, \dots \text{ (máx)} \\ m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \text{ (mín)} \end{cases} \quad (2-12)$$

Se ha añadido el término $\pm\lambda_0/2$ para tener en cuenta el cambio de fase de π entre la reflexión en una u otra cara de la película delgada. Pasando este término al segundo miembro, la anterior también se puede escribir de la siguiente forma,

$$h = m' \frac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m' = 0, 1, 2, \dots \text{ (mín)} \\ m' = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \text{ (máx)} \end{cases} \quad (2-13)$$

donde se ha hecho $m' = m \mp 1/2$ y $\lambda = \lambda_0/n'$. De acuerdo con la condición anterior, las franjas son los contornos de espesor constante a intervalos de espesor de $\lambda/2$; por tanto, si la película es de espesor constante, la intensidad sobre la misma es uniforme (no aparece este tipo de franjas sobre ella).

2.2.3 Aplicación

Las franjas de igual espesor se usan frecuentemente para comprobar la forma de una superficie óptica utilizando la película de aire formada entre la superficie a comprobar y otra patrón. Cuando la película de aire es una cuña formada por superficies planas, las franjas son equidistantes y paralelas a la arista de la cuña. De acuerdo con la ilustración de la figura 2-6, el ángulo α de la cuña se puede determinar por la relación $\alpha \simeq \lambda/(2d)$, siendo d el espaciado entre franjas. Así, por ejemplo, para $\alpha = 1'$ y $\lambda = 550$ nm, la separación es $d = 1,9$ mm, lo cual indica que α debe ser muy pequeño para que las franjas estén razonablemente separadas. Este hecho, sin embargo, hace que estas franjas sean

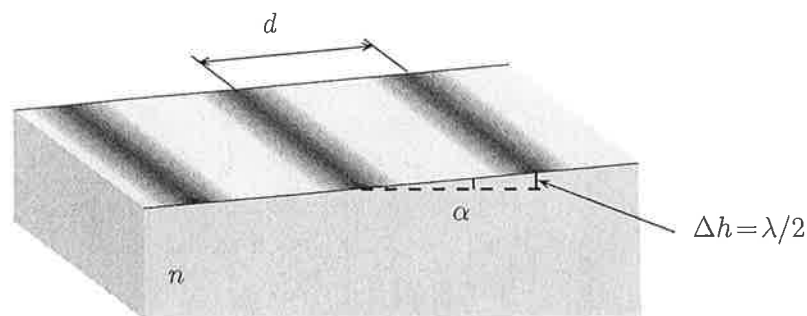


Figura 2-6 Relación entre el ángulo que forman las caras de una película delgada, el espaciado de las franjas y la λ de la luz.

particularmente útiles para comprobar en los talleres de óptica las superficies finales de manera muy simple y con una precisión notable. Por ejemplo, en el caso del pulido de una lámina circular de 2 cm de diámetro, si mediante sucesivas comparaciones con la superficie patrón durante el proceso de pulido se consigue eliminar las franjas (por tanto $d \gtrsim 2$ cm), la separación de la planitud de esa lámina será menor que $\lambda/2$ y el ángulo entre las caras menor que $3''$ de arco.

Como la posición de las franjas depende de la longitud de onda, si se utiliza luz blanca y dadas las diferencias de camino óptico tan pequeñas en el caso de películas delgadas, se observan unas pocas franjas coloreadas. Ésta es la explicación de los colores que aparecen en algunos fenómenos naturales: en las burbujas de jabón, en las películas de aceite sobre superficies no bien limpiadas, en las alas de ciertas mariposas y de aves tropicales.

2.2.4 Anillos de Newton

Los llamados *anillos de Newton* son un ejemplo particular de franjas de igual espesor que tienen interés histórico. Se observan en la película de aire que queda entre la superficie esférica convexa de una lente y una superficie de vidrio plana en contacto con ella que se muestra en la figura 2-7. Las franjas son anillos concéntricos con centro en C, para los que se cumple (2-13), por lo que de acuerdo con la figura se verifica:

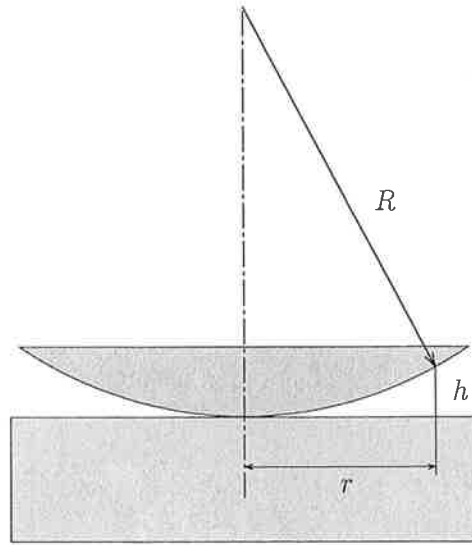


Figura 2-7 Esquema del montaje experimental para observar los anillos de Newton.

$$m' \frac{\lambda}{2} = h = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R \sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}} \simeq R - R \left(1 - \frac{r^2}{2R^2} + \dots \right) \simeq \frac{r^2}{2R}, \quad (2-14)$$

siendo r el radio de los anillos y R el radio de la superficie de la lente, y teniendo en cuenta que $r \ll R$. Por tanto se tiene una relación entre el radio de los anillos y la λ de la luz:

$$r = \sqrt{m' R \lambda} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} m' = 0, 1, 2, \dots & (\text{mín}) \\ m' = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots & (\text{máx}) \end{cases} \quad (2-15)$$

Cuando ambas superficies están en contacto, $m' = 0$, el centro de los anillos es oscuro y los radios de los anillos oscuros son proporcionales a las raíces de los números enteros. Si se va separando la lente de la superficie plana, el valor de h aumenta en cada punto. Los anillos tienen que moverse hacia la posición que ahora tenga el valor de h asociado a su orden interferencial, por lo que se van haciendo más pequeños y el centro C se convierte en un sumidero de anillos (uno cada vez que h aumenta $\lambda/2$). A su vez, la intensidad del centro va oscilando entre la oscuridad y el valor máximo. Es curioso notar que, siendo un método sencillo para medir la λ (como el experimento de Young), Newton interpretara los anillos en función de su modelo corpuscular en vez del modelo ondulatorio. Por otra parte, Newton observó unos pocos anillos coloreados (la secuencia conocida como *colores de Newton*) porque usó luz blanca, de forma análoga a cuando se usa luz blanca en el experimento de Young (véase la sección 1.4).

2.3. El interferómetro de Michelson

2.3.1. Descripción

En las interferencias por reflexiones en láminas estudiadas en las secciones anteriores, los dos rayos que interfieren sólo están separados físicamente en el interior de la lámina, de modo que resulta difícil la manipulación independiente de los caminos ópticos de cada rayo. En el famoso *interferómetro de Michelson* también se usan reflexiones en láminas pero de manera que los rayos que interfieren sigan trayectorias separadas para que sea accesible la manipulación de cada camino óptico por separado; este simple hecho lo convierte en un poderoso instrumento.

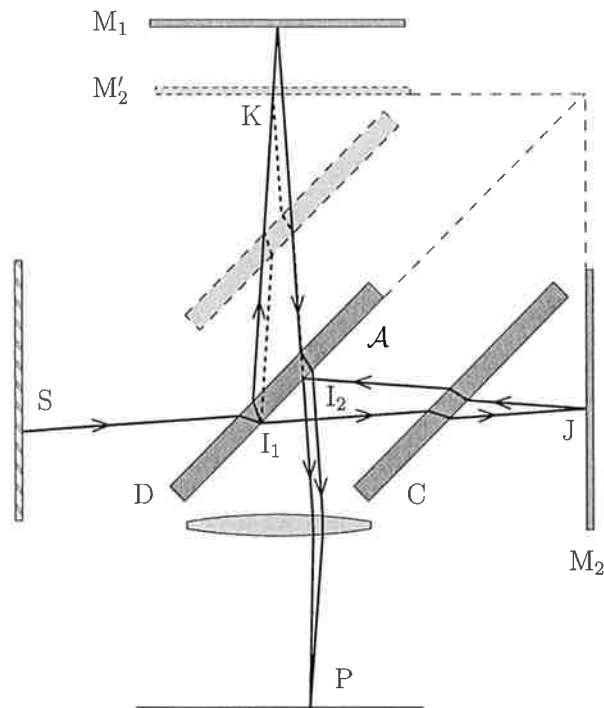


Figura 2-8 Principio de funcionamiento del *interferómetro de Michelson*.

La versión más simple de este instrumento se ilustra esquemáticamente en la figura 2-8. Ahora la división de amplitud de la luz procedente de una fuente extensa se realiza en una lámina semitransparente (*divisor de haz*) D orientada para incidencia a 45° . Típicamente, es una lámina de vidrio en una de cuyas caras \mathcal{A} se ha depositado

una película delgada de metal, o una multicapa dieléctrica (véase la sección 2.6), la cual divide la amplitud aproximadamente al 50 % entre el rayo transmitido y el reflejado. En general, las reflexiones en la cara que no contiene el depósito semitransparente son mucho más débiles que las otras y se pueden despreciar, pero lo ideal es evitarlas depositando sobre esta cara un recubrimiento antirreflectante (véase la sección 2.6.2). Los rayos reflejado y transmitido en la lámina, que se propagan en direcciones aproximadamente perpendiculares, inciden sobre sendos espejos M_1 y M_2 donde son reflejados de nuevo hacia la lámina; en ésta, las amplitudes de ambos son divididas por dos otra vez en sendos rayos transmitidos y reflejados. Tomando la amplitud transmitida del rayo procedente de M_1 y la reflejada del procedente de M_2 , se puede observar interferencia entre ambos. De esta forma se pueden manipular los caminos ópticos de cada rayo, $\mathcal{A}-M_1$ y $\mathcal{A}-M_2$, de forma independiente. Además, uno de los espejos, el M_1 por ejemplo, se monta sobre un soporte deslizante de manera que se pueda variar cómodamente la diferencia de camino con un tornillo micrométrico acoplado al soporte. Debido a que el rayo $\mathcal{A}-M_2$ atraviesa la lámina D una sola vez, mientras que el rayo $\mathcal{A}-M_1$ la atraviesa tres veces, se suele intercalar entre D y M_2 una lámina compensadora idéntica a la D y paralela a ella (pero sin recubrimiento semitransparente) para hacer más simétricos ambos recorridos.

2.3.2 Tipos de franjas

El tipo de franjas que se observan en el interferómetro de Michelson se puede analizar con comodidad de la manera siguiente. Llamemos M'_2 a la imagen del espejo M_2 dada por el divisor de haz \mathcal{A} (véase la Fig. 2-8). El camino óptico a lo largo del rayo $S I_1 J I_2 P$ (transmitido en \mathcal{A} , reflejado en M_2 y reflejado en \mathcal{A}) es igual al camino óptico a lo largo del rayo $S I_1 K I_2 P$ (reflejado en \mathcal{A} , reflejado en el espejo virtual M'_2 y transmitido en \mathcal{A}). Por tanto, se puede considerar que las franjas que se observan en la pantalla P , se originan en una película de aire formada por la superficie reflectora real M_1 y la virtual M'_2 . Sólo hay que reemplazar el cambio de fase π (entre reflexión en una y otra cara de la lámina) por el valor ϕ igual a la diferencia entre el cambio de fase que ocurre en la reflexión interna y la externa de la superficie \mathcal{A} . (Esta diferencia depende del tipo de semirreflector que se ha depositado en \mathcal{A}). Por tanto, se observarán franjas similares a

las discutidas en las secciones anteriores.

Así, si M_1 y M'_2 son paralelos, para calcular la diferencia de fase será aplicable la ecuación (2-7) en la forma:[†]

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n' h \cos \theta' + \phi \quad (2-16)$$

y se obtienen anillos circulares en el plano focal de la lente con centro en el foco. Si, mediante el tornillo micrométrico, se acerca M_1 a M'_2 los anillos se contraen hacia el centro (un anillo concreto corresponde a un orden m fijo, que es un valor de δ ; al disminuir h , $\cos \theta'$ tiene que aumentar, y por tanto θ' tiene que disminuir). Al mismo tiempo su anchura aumenta al aumentar la escala angular, hasta que la iluminación del plano focal se hace uniforme cuando M_1 y M'_2 coinciden; entonces se dice que los espejos del interferómetro M_1 y M_2 están en *contacto óptico*. El nivel de iluminación del campo dependerá del valor de ϕ : para $\phi=0$ el nivel será máximo, para $\phi=\pi$ será mínimo.

Por otra parte, cuando M_1 y M'_2 no son paralelos sino que forman un ángulo pequeño; si están lo suficientemente próximos, se tiene el caso de una película delgada y se forman franjas de igual espesor localizadas en o cerca de la superficie de esta película (*franjas de Fizeau*). En principio, por tanto, las franjas son líneas rectas paralelas a la arista de la cuña que forman las dos caras de la película. Sin embargo, a medida que la separación aumenta, el intervalo de ángulo de incidencia correspondiente a cada punto del campo de visión deja de ser despreciable, la visibilidad de las franjas disminuye, y se hacen curvas con el lado convexo hacia el vértice de la cuña.

Tanto si M_1 y M'_2 son paralelos como si están inclinados, un cambio $\Delta m \lambda_0$ del camino óptico en cualquiera de los brazos del instrumento produce un desplazamiento del campo a través de Δm órdenes. Visualmente se pueden medir desplazamientos de hasta $\sim 1/20$ de orden, pero usando métodos adecuados se puede llegar a detectar $\sim 1/1000$ de orden. Cuando la separación entre M_1 y M'_2 es del orden de λ (condición de proximidad al contacto óptico), se pueden observar franjas con luz blanca.

[†]En el caso de que el divisor de haz consista en una película metálica, la fase ϕ es una función suave del ángulo θ' (véase el capítulo 9 de *Optica Electromagnética vol.I*), por lo que entre anillos próximos se puede considerar constante.

2.3.3 Aplicaciones

El interferómetro de Michelson está actualmente obsoleto excepto las versiones modificadas, especialmente las que usan luz colimada, como comentaremos en la sección siguiente. Pero desde su aparición se hizo famoso debido al uso que hizo del instrumento el propio Michelson en tres experimentos importantes. *i)* El experimento de la *deriva del éter* de Michelson-Morley que puso de manifiesto el carácter de “invariante” de la velocidad de la luz y la inexistencia del éter. *ii)* El primer estudio sistemático de la *estructura fina* de las líneas espectrales utilizando la medida de la visibilidad de las franjas y el método discutido en la sección 1.5. *iii)* La primera comparación directa de la longitud de onda de ciertas líneas espectrales de longitud de coherencia grande con el *metro patrón*.

2.3.4 Interferómetro de Twyman-Green

Actualmente se usan variantes del interferómetro de Michelson de entre las cuales vamos a considerar aquí la modificación de *Twyman-Green*, una de las más empleadas para la comprobación y acabado de elementos ópticos de precisión. Consiste esta modificación en iluminar el interferómetro de Michelson con luz coherente y colimada (Fig. 2-9), de manera que los frentes de onda que inciden sobre la lámina divisora de haz y sobre los espejos sean planos y se simplifique considerablemente el análisis de las franjas de interferencia. Si los espejos son perpendiculares, M_2 y M'_1 son paralelos y la situación se corresponde con el caso de una lámina de caras plano-paralelas que es iluminada con un solo valor del ángulo θ . Por tanto, el campo está iluminado homogéneamente (no aparecen franjas) con una intensidad que depende de la diferencia de camino entre los dos frentes de onda. Pero si los espejos no son perpendiculares, aparecerán franjas en la cuña formada por M_2 y M'_1 .

En la figura 2-10 se representan dos variantes del interferómetro de Twyman-Green usadas para comprobación de un prisma operando en desviación mínima y de una lente. Si los elementos a comprobar carecen de defectos, los frentes de onda que vuelven de ellos son planos y no se observan franjas con el instrumento bien ajustado. Pero si el

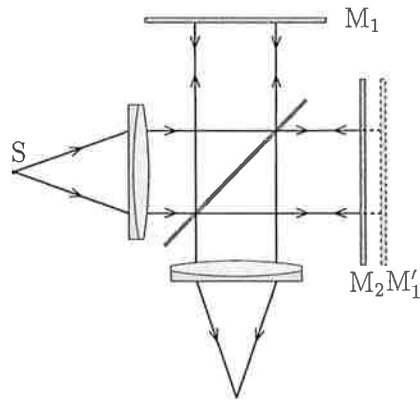


Figura 2-9 Marcha de los rayos en el interferómetro de Twyman-Green.

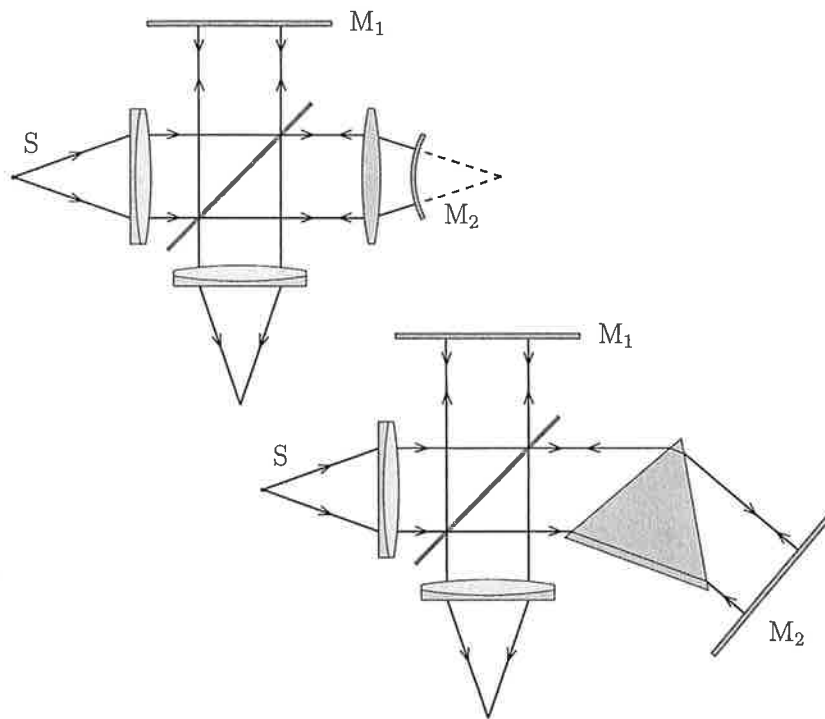


Figura 2-10 Modificaciones del interferómetro de Twyman-Green utilizadas para la comprobación de una lente y de un prisma en desviación mínima.

prisma o la lente distorsionan el frente de onda, aparecen franjas de igual espesor que indican dónde deben ser pulidos para su corrección. Utilizando luz laser y barriendo el interferograma con un detector adecuado, se pueden obtener los mapas de contorno. Estos mapas son procesados en un ordenador para, de forma automática, ser corregidos por un “robot” de pulido.

2.3.5 Interferómetro de Mach-Zehnder

El interferómetro de Mach-Zehnder es en realidad una variante de un interferómetro anterior llamado de Jamin, y como el Twyman-Green utiliza luz coherente y colimada. Como se ilustra en la figura 2-11, en este interferómetro no se devuelven los frentes de onda reflejados al divisor de haz inicial \mathcal{A}_1 sino que se envían a un segundo divisor de haz \mathcal{A}_2 . Con esta configuración la luz sólo pasa una vez por cada brazo y resulta más fácil interpretar los cambios inducidos sobre las franjas por un elemento introducido en un brazo para su comprobación. Por otra parte, el ajuste del instrumento es más crítico que el Twyman-Green, por lo que es especialmente adecuado para medir pequeños cambios de camino óptico. Un buen ejemplo es el uso que se hace de este interferómetro para analizar las turbulencias del aire en los túneles de ensayos aerodinámicos midiendo los pequeños cambios de índice de refracción que se generan en el aire. Aunque son muchas y variadas las aplicaciones de este montaje.

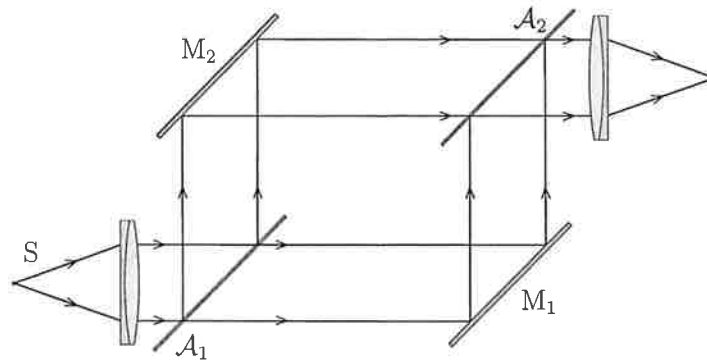


Figura 2-11 Marcha de los rayos en un interferómetro de Mach-Zehnder.

2.4 Interferencia de ondas múltiples en láminas de caras plano-paralelas

Al estudiar las reflexiones en la lámina de caras plano-paralelas en la sección 2.1 (Fig. 2-1b), se ha considerado sólo la primera reflexión interna, despreciándose las restantes. Por esta razón, nuestro tratamiento se ha limitado al caso de interferencia de dos rayos. Esta manera de proceder está justificada cuando, como es el caso ordinario, el

coeficiente de reflexión de las caras de la lámina es mucho menor que 1 (por ejemplo, en un vidrio a incidencia normal $R \simeq 0,04$). En esta sección nos planteamos analizar la contribución a la intensidad final de todos los rayos reflejados. Veremos que cuando la reflectancia de las caras se acerca a la unidad, la distribución de intensidad en el campo de franjas se modifica profundamente dando lugar a aplicaciones importantes. Este es un ejemplo de interferencia de múltiples ondas donde, como en otros ejemplos parecidos (véanse las redes de difracción en el capítulo 4), se pone de manifiesto el carácter altamente direccional del proceso interferencial. Ello es debido a que todas las ondas tienen que estar en fase en la dirección de un máximo.

2.4.1 Reflectancia y transmitancia de una lámina

Consideremos la misma lámina de la figura 2-1b pero teniendo en cuenta ahora las infinitas reflexiones y transmisiones que pueden ocurrir en cada una de las caras de la lámina (Fig. 2-12). Para manejar más cómodamente este número infinito de rayos, utilizaremos de forma explícita los factores de Fresnel (véase el capítulo 10 de *Optica Electromagnética vol.I*). Su expresión concreta depende de los índices de refracción n, n' , del ángulo de incidencia θ y de la polarización. Denominaremos r y t los factores de Fresnel (de amplitud) y R_1, T_1 las reflectancia y transmitancia de una cara cuando los rayos entran en la lámina, y r', t', R'_1, T'_1 los análogos cuando los rayos salen de ella. Para una misma polarización, siendo θ y θ' los ángulos fuera y dentro de la lámina

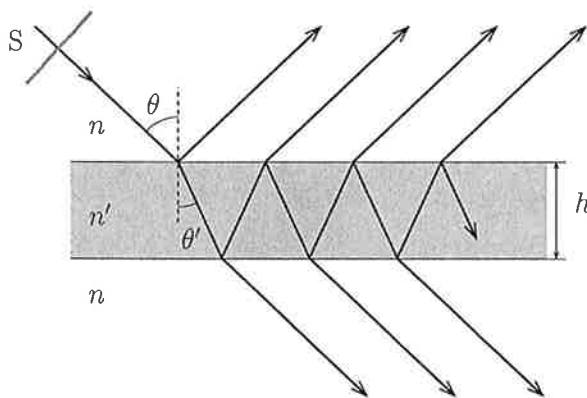


Figura 2-12 Reflexiones múltiples en una lámina de caras plano-paralelas.

respectivamente ($n \sin \theta = n' \sin \theta'$) y cuando no hay absorción, estas magnitudes están relacionadas por las siguientes ecuaciones (relaciones de Stokes):

$$\begin{aligned} t(\theta) t'(\theta') &= T_1(\theta) = T_1'(\theta') \\ r(\theta) &= -r'(\theta') \quad \rightarrow \quad R_1(\theta) = R_1'(\theta') \\ R_1 + T_1 &= 1. \end{aligned} \quad (2-17)$$

Por tanto, dado un rayo de amplitud E_{i0} y polarizado linealmente (paralelo o perpendicular al plano de incidencia) que incide sobre la lámina con un ángulo θ , el primer rayo reflejado tendrá una amplitud $E_{r1} = rE_{i0}$, donde r incluye el posible cambio de fase (0 ó π) debido a la reflexión. De acuerdo con la figura 2-12, el segundo de la serie de rayos reflejados tendrá una amplitud $t r' t' E_{i0}$ y su fase se verá incrementada respecto al primero debido al doble recorrido de la lámina, es decir

$$E_{r2} = t r' t' E_{i0} e^{i\delta}, \quad (2-18)$$

donde la diferencia de fase δ viene dada por la fórmula (2-6), que se escribe a continuación sin el subfijo por comodidad:

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n' h \cos \theta'. \quad (2-19)$$

Entonces, el campo eléctrico total de la onda reflejada vendrá dado por:

$$\begin{aligned} E_r &= E_{i0} (r + t t' r' e^{i\delta} + t t' r'^3 e^{i2\delta} + \dots + t t' r'^{2p-1} e^{ip\delta} + \dots) \\ &= E_{i0} [r + t t' r' e^{i\delta} (1 + r'^2 e^{i\delta} + r'^4 e^{i2\delta} + \dots)] \\ &= E_{i0} \left(r + t t' r' e^{i\delta} \frac{1}{1 - r'^2 e^{i\delta}} \right) = E_{i0} r \left(1 - \frac{T_1 e^{i\delta}}{1 - R_1 e^{i\delta}} \right) \\ &= E_{i0} \frac{\sqrt{R_1} (1 - e^{i\delta})}{1 - R_1 e^{i\delta}}. \end{aligned} \quad (2-20)$$

En esta sucesión de igualdades se ha sumado la serie geométrica infinita de razón $r'^2 e^{i\delta}$ y se han tenido en cuenta las relaciones (2-17). A partir de esta expresión de la amplitud se obtiene con un poco de álgebra la siguiente expresión para la reflectancia de la lámina:

$$R_{\text{FP}} = \frac{I_r}{I_i} = \frac{E_r}{E_{i0}} \left(\frac{E_r}{E_{i0}} \right)^* = \frac{4 R_1 \sin^2 \frac{\delta}{2}}{(1 - R_1)^2 + 4 R_1 \sin^2 \frac{\delta}{2}} = \frac{F \sin^2 \frac{\delta}{2}}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}, \quad (2-21)$$

donde se ha hecho,

$$F = \frac{4 R_1}{(1 - R_1)^2}. \quad (2-22)$$

Mediante un razonamiento análogo al anterior, se llega a la siguiente expresión para la transmitancia de la lámina:

$$T_{\text{FP}} = \frac{I_t}{I_i} = \frac{T_1^2}{(1 - R_1)^2 + 4 R_1 \sin^2 \frac{\delta}{2}} = \frac{1}{1 + F \sin^2 \frac{\delta}{2}}. \quad (2-23)$$

Estas dos expresiones reciben el nombre de *fórmulas de Airy*, y, debido a que se ha supuesto que no hay absorción, cumplen la siguiente relación de conservación de la energía:

$$R_{\text{FP}} + T_{\text{FP}} = 1. \quad (2-24)$$

2.4.2 Posición de los anillos

Cuando la lámina de la figura 2-12 es iluminada con una fuente de luz extensa de manera similar a la de la figura 2-1, cada dirección para la cual todos los rayos estén en fase producirá un anillo de interferencia de intensidad máxima. Así, para la *intensidad transmitida* (2-23) se tendrá:

$$\left. \begin{array}{l} \text{máx : } \sin^2 \frac{\delta}{2} = 0 \\ \text{mín : } \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \delta = m 2\pi \rightarrow 2 n' h \cos \theta' = m \lambda_0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = 1, 2, \dots \\ m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \end{array} \right. \quad (2-25)$$

Análogamente, para la *intensidad reflejada* se tienen anillos en posiciones complementarias. De (2-21) se obtienen las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} \text{máx : } \sin^2 \frac{\delta}{2} = 1 \\ \text{mín : } \sin^2 \frac{\delta}{2} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \delta = m 2\pi \rightarrow 2 n' h \cos \theta' = m \lambda_0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \\ m = 1, 2, \dots \end{array} \right. \quad (2-26)$$

Comparando las posiciones de los anillos dadas por estas expresiones con la (2-8), se comprueba que son idénticas al caso en que sólo se consideran dos rayos en el proceso de interferencia.

2.4.3 Distribución de intensidad

Sin embargo, la distribución de intensidad dada por las ecuaciones (2-21) y (2-23) es diferente de la que se obtiene cuando interfieren dos rayos. La única excepción es el caso "límite" en que la reflectancia de las caras es muy pequeña, $R_1 \ll 1$; entonces las expresiones anteriores sí coinciden con la distribución de intensidad (1-10) dada para el caso de dos rayos. En efecto, tomando sólo los términos de primer orden en el desarrollo en serie de potencias de F se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{I_r}{I_i} &\simeq F \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2} \\ \frac{I_t}{I_i} &\simeq \left(1 - F \operatorname{sen}^2 \frac{\delta}{2} \right). \end{aligned} \quad (2-27)$$

Al aumentar R_1 , sin embargo, la distribución de intensidad varía substancialmente con respecto a la expresión anterior. En la figura 2-13 se ha representado la intensidad transmitida, ecuación (2-23), para varios valores del parámetro F (o de la reflectancia R_1). Para $R_1 \simeq 0,04$, correspondiente a incidencia normal para el vidrio ordinario, los mínimos de intensidad tienen mucha luz, los máximos y mínimos son igualmente anchos y los anillos tienen muy poco contraste (véanse los comentarios de la subsección 2.1.5). A medida que aumenta la reflectancia de las caras, los mínimos se hacen más oscuros

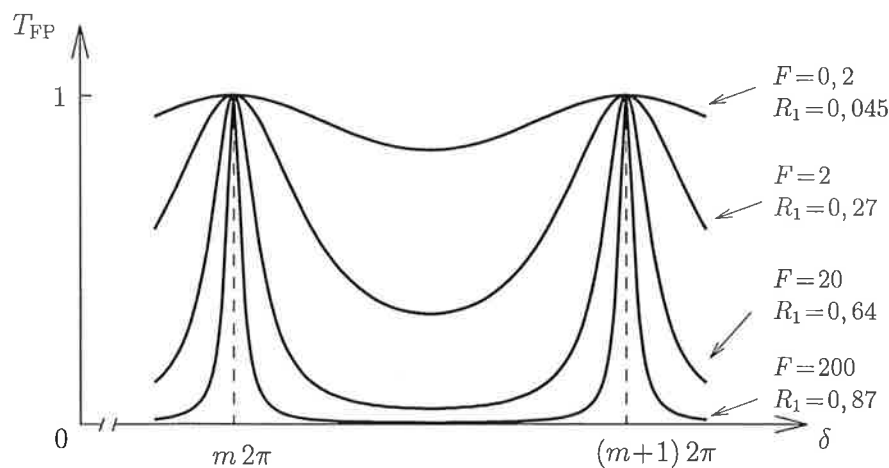


Figura 2-13 Distribución de intensidad en la luz transmitida por una lámina en la que se tiene en cuenta la interferencia de ondas múltiples. Se ha representado un intervalo de dos anillos para varios valores de la reflectancia R_1 (el valor de R_1 y del parámetro F se indica en cada curva).

y más anchos, y los máximos más estrechos. Para $R_1 \gtrsim 0,9$ los mínimos son tan anchos y oscuros que el campo de la luz transmitida es un fondo negro con unos anillos muy finos y brillantes. Por el contrario, para la luz reflejada se obtienen anillos muy negros y finos sobre un fondo brillante. Es decir que a medida que, al aumentar R_1 , aumenta el número efectivo de rayos que interfieren, la condición de interferencia (constructiva o destructiva) se hace más restrictiva, el proceso se hace muy selectivo direccionalmente y la anchura de los anillos disminuye mucho.

2.4.4 Finura de los anillos y luz cuasi-monocromática

Debido a la alta selectividad angular que implica la condición de máximo (o mínimo) en interferencia de ondas múltiples, la exigencia de monocromaticidad de la fuente luminosa es mucho mayor que en el caso de dos rayos para conseguir que los anillos sean finos. Dadas las importantes aplicaciones espectroscópicas a que da lugar este hecho, a continuación se analiza con más detalle. En primer lugar, se define la *finura* \mathcal{F} de un anillo como el cociente de la separación en fase entre dos anillos consecutivos, $\Delta\delta = 2\pi$, y la *anchura media* del anillo, ε , (anchura a la mitad de la altura según se indica en la figura 2-14), es decir:

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi}{\varepsilon}. \quad (2-28)$$

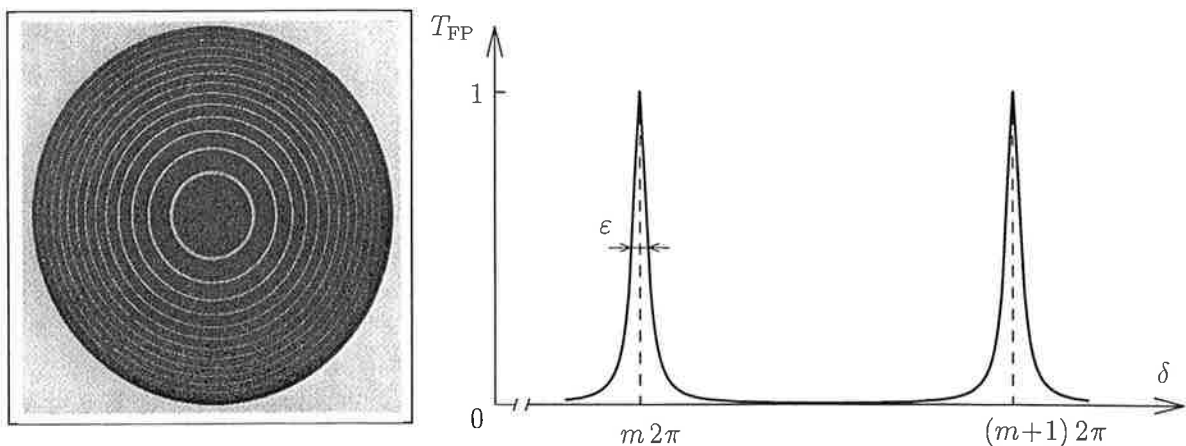


Figura 2-14 Separación entre anillos y anchura media de un anillo medidas en la imagen real de los anillos (izquierda) y en valor de la fase (derecha).

Usando la ecuación (2-23) para la luz transmitida, por ejemplo, la anchura media viene determinada por la condición:

$$\frac{I_t}{I_i} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + F \frac{\text{sen}^2 \frac{m 2\pi \pm \varepsilon/2}{2}}{2}}, \quad (2-29)$$

de donde, teniendo en cuenta que $\varepsilon \ll 2\pi$, se obtiene,

$$\varepsilon = \frac{4}{\sqrt{F}} = \frac{2(1 - R_1)}{\sqrt{R_1}} \quad (2-30)$$

y por tanto la finura viene dada por:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} = \frac{\pi\sqrt{R_1}}{1 - R_1}. \quad (2-31)$$

Consideremos ahora que la fuente de luz tiene una anchura de banda $\Delta\lambda_0$ alrededor del valor medio λ_0 . La dependencia de la diferencia de fase con λ_0 (2-19), implica que los máximos de los anillos se extenderán en un intervalo de fases $\Delta\delta$ dado por (derivando (2-19) y despreciando la dependencia de n' con λ_0):

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = -\frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} \quad \rightarrow \quad |\Delta\delta| = \delta \frac{|\Delta\lambda_0|}{\lambda_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L \frac{|\Delta\lambda_0|}{\lambda_0}, \quad (2-32)$$

donde se ha usado $\delta = 2\pi \Delta L / \lambda_0$, siendo ΔL la diferencia de camino óptico asociada al orden del anillo, $m = \delta / 2\pi$. Las intensidades de todos estos anillos se suman por ser incoherentes, los máximos se ensanchan en el valor $\Delta\delta$ y la visibilidad disminuye. Si se quiere evitar este ensanchamiento, todos ellos deben caer en un intervalo de fases mucho menor que la anchura de un anillo, es decir, se debe cumplir que:

$$\Delta\delta \ll \varepsilon \quad \rightarrow \quad \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta L \frac{|\Delta\lambda_0|}{\lambda_0} \ll \frac{2\pi}{\mathcal{F}}, \quad (2-33)$$

donde, además de la ecuación anterior (2-32), se ha tenido en cuenta la definición de finura (2-28). De la última relación se obtiene finalmente la condición:

$$l_c = \frac{\lambda_0^2}{|\Delta\lambda_0|} \gg \mathcal{F} \Delta L, \quad (2-34)$$

siendo l_c la longitud de coherencia temporal. Comparando esta expresión con la (1-35) correspondiente a interferencia de dos rayos (interferómetros de Young, Michelson, etc) se observa que la longitud de coherencia temporal l_c de la fuente luminosa ahora tiene que ser un factor \mathcal{F} mayor (para igual valor de ΔL).

2.5 Interferómetro de Fabry-Perot

2.5.1 Descripción

El *interferómetro Fabry-Perot* recibe el nombre de sus inventores y se puede considerar como el ejemplo más sencillo de resonador óptico. El principio de funcionamiento es el de una lámina de aire de caras plano-paralelas con alta reflectancia operando a incidencia casi normal, en la que se producen interferencias múltiples a las que se aplican los conceptos y fórmulas vistos en la sección anterior. La lámina de aire, (véase la Fig. 2-15) se consigue por medio de dos láminas de vidrio (frecuentemente sílice) cuyas superficies interiores tienen un recubrimiento de alta reflectancia (usualmente una multicapa dieléctrica). Cada lámina de vidrio tiene sus caras ligeramente no paralelas con objeto de eliminar el efecto de las interferencias múltiples producidas en su interior (sólo interesan las producidas en la “lámina” de aire).

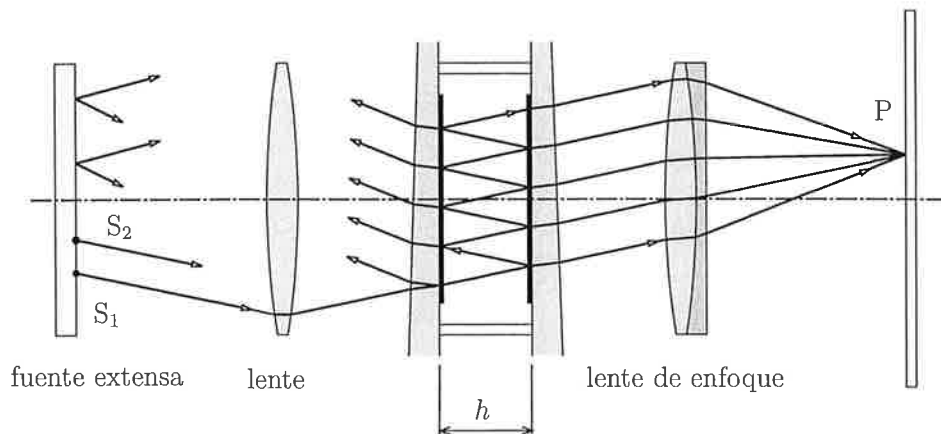


Figura 2-15 Esquema de funcionamiento de un interferómetro Fabry-Perot. Girando la figura plana alrededor del eje del sistema se obtienen en la pantalla los anillos de “igual inclinación”.

En la versión llamada *etalón Fabry-Perot* (Fig. 2-15), las láminas están separadas por un *espaciador*, cilindro hueco de invar o sílice (materiales de bajo coeficiente de dilatación térmica) con tres tachones salientes en cada extremo, y se mantienen en posición mediante presión mecánica. Usando técnicas ópticas, los planos definidos por los tachones del espaciador se hacen muy paralelos, y los ajustes finos se consiguen variando la presión sobre los tachones. En la versión llamada *interferómetro de barrido* no existe el

espaciador y uno de los espejos va acoplado a un soporte piezoeléctrico mediante el cual se puede variar el espaciado entre las láminas con extraordinaria finura.

2.5.2 Absorción en las caras

Las características del interferómetro Fabry-Perot están estrechamente ligadas a la reflectancia de sus caras R_1 o, lo que es equivalente, al parámetro F definido en (2-22) el cual determina la reflectancia (2-21) y la transmitancia (2-23) de la lámina. Sin embargo, al obtener estas fórmulas, se ha supuesto que no hay absorción en las caras y por tanto la conservación de la energía se escribe $R_1 + T_1 = 1$. Esto en general no es cierto, pero de forma especial cuando la reflectancia de las caras R_1 es muy alta. En este caso, incluso una absorbancia A_1 pequeña, desempeña un papel importante porque el número efectivo de reflexiones es muy alto. Ahora la conservación de la energía implica que:

$$R_1 + T_1 + A_1 = 1. \quad (2-35)$$

Sustituyendo el nuevo valor de la transmitancia $T_1 = 1 - R_1 - A_1$ en el numerador de la (2-23) para la intensidad transmitida, se obtiene:

$$T_{\text{FP}} = \frac{I_t}{I_i} = \left(1 - \frac{A_1}{1 - R_1}\right)^2 \frac{1}{1 + F \sin^2 \delta / 2}. \quad (2-36)$$

La absorción de las caras A_1 afecta de forma especial al *pico de transmisión* del interferómetro Fabry-Perot, definido por:

$$\tau = \left(\frac{I_t}{I_i}\right)_{\text{max}} = \left(1 - \frac{A_1}{1 - R_1}\right)^2; \quad (2-37)$$

en cambio no afecta al parámetro llamado *contraste*, definido por:

$$C = \frac{(I_t/I_i)_{\text{max}}}{(I_t/I_i)_{\text{min}}} = \left(\frac{1 + R_1}{1 - R_1}\right)^2 \quad (2-38)$$

ni afecta por tanto a la visibilidad. Esta magnitud sí es afectada por el acabado óptico del instrumento: defectos, planitud y paralelismo de las caras.

2.5.3 Poder de resolución espectral

La aplicación más importante y extendida del interferómetro Fabry-Perot quizás sea en espectroscopia de muy alta resolución. Debido a su elevada selectividad angular, si sobre el instrumento inciden dos longitudes de onda diferentes aunque muy próximas, aparecerán dos series de anillos ligeramente desplazados que se podrán distinguir gracias a su extremada finura.

De forma general, se introduce la magnitud llamada *poder de resolución espectral* P_{re} de un instrumento espectroscópico para caracterizar la capacidad que tiene el instrumento de distinguir como diferentes dos longitudes de onda muy próximas. Se define como el cociente entre la longitud de onda media λ_0 y la variación mínima $(\Delta\lambda_0)_{min}$ que puede detectar, es decir,

$$P_{re} = \frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda_0)_{min}} \quad (2-39)$$

El valor $(\Delta\lambda_0)_{min}$, además de variar de unos instrumentos a otros, depende del criterio que se elija para definirlo. El criterio más extendido es el introducido por Lord Rayleigh basándose en la función $\text{senc}^2 x = (\text{sen}^2 x)/x^2$ que aparece con frecuencia en relación con los instrumentos ópticos. De acuerdo con este criterio, dos distribuciones de luz dadas por la función citada se consideran justamente resueltas cuando el máximo de cada uno de ellas coincide con el primer cero de la otra (véase la Fig. 2-16). En estas condiciones, el cociente entre el valor en el valle y en los máximos debe ser igual a $[2 \text{sen}^2(\pi/2)]/(\pi/2)^2 = 8/\pi^2 = 0,81$ (el doble del valor de la función $(\text{sen}^2 x)/x^2$ cuando x es equidistante entre el máximo principal y el primer mínimo).

En el caso del Fabry-Perot el criterio debe fijar las condiciones en que dos anillos muy próximos, cada uno asociado a una longitud de onda diferente, se pueden considerar como diferentes o bien están tan juntos que se considera uno solo. Un criterio cómodo consiste en suponer que los dos anillos están justamente resueltos cuando la separación entre ellos es igual a la anchura media ε (véase la Fig. 2-17). Por tanto, la separación mínima en fase $(\Delta\delta)_{min}$, de acuerdo con (2-28) y (2-30) vendrá dada por:

$$|(\Delta\delta)_{min}| = \varepsilon = \frac{2\pi}{\mathcal{F}}. \quad (2-40)$$

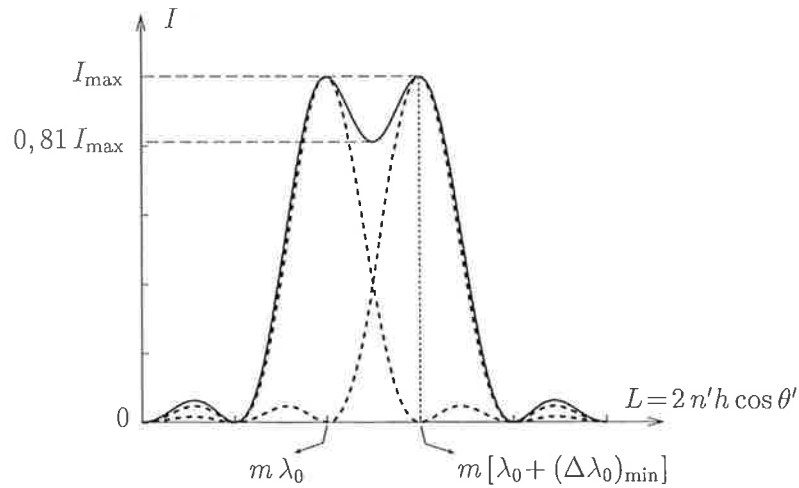


Figura 2-16 Con la función $\text{senc}^2 x = (\text{sen}^2 x)/x^2$ representada en esta figura, las dos distribuciones se consideran justamente resueltas cuando el máximo de cada uno de ellas coincide con el primer cero de la otra.

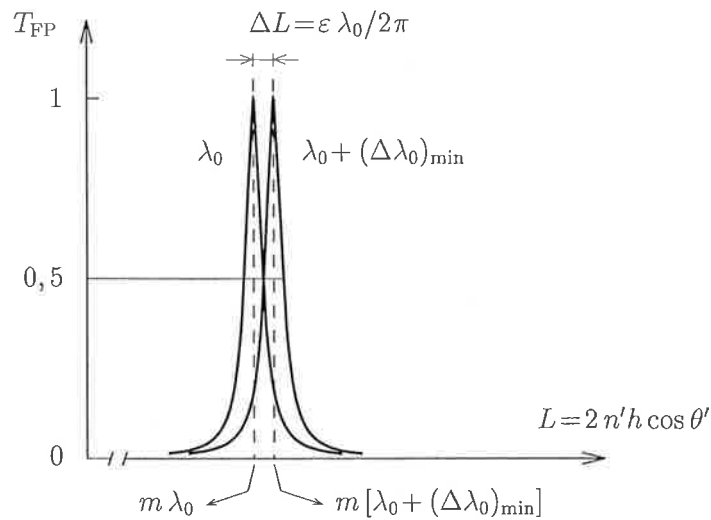


Figura 2-17 Separación de dos máximos en un Fabry-Perot para que las longitudes de onda correspondientes se puedan considerar justamente resueltas.

A partir de esta expresión se puede determinar la magnitud $(\Delta\lambda_0)_{\min}$ usando la relación (2-32) (puesto que $(\Delta\delta)_{\min} \ll \delta$), de modo que finalmente el *poder de resolución espectral*

P_{re} será:

$$P_{\text{re}} = \frac{\lambda_0}{|(\Delta\lambda_0)_{\min}|} = \frac{\delta_m}{|(\Delta\delta)_{\min}|} = \frac{2\pi m}{2\pi/\mathcal{F}} = \mathcal{F}m, \quad (2-41)$$

siendo $m = \delta_m/(2\pi)$ el orden interferencial. Por tanto, el poder de resolución espectral del instrumento aumenta de forma lineal con la finura. Además, como $m = (2n'h/\lambda_0) \cos \theta'$, P_{re} también aumenta con el grosor de la cavidad.

2.5.4 Intervalo espectral libre

Cuando las dos longitudes de onda que se están analizando con el Fabry-Perot se diferencian bastante, los anillos pueden estar tan separados que el anillo de orden m de la λ más larga coincida o sobrepase al anillo de orden $m+1$ de la λ más corta (véase la Fig. 2-18).[†] En esta situación el instrumento es inservible para comparar de forma fiable las dos longitudes de onda. Por ello, se define un nuevo parámetro llamado *intervalo espectral libre* del instrumento, $(\Delta\lambda_0)_{ie}$, que determina la diferencia en longitud de onda para la cual tiene lugar esa superposición de órdenes, es decir,

$$L_{m+1,\lambda_0} = (m+1)\lambda_0 = L_{m,\lambda_0+\Delta\lambda_0} = m[\lambda + (\Delta\lambda_0)_{ie}], \quad (2-42)$$

de donde,

$$(\Delta\lambda_0)_{ie} = \frac{\lambda_0}{m} = \mathcal{F}(\Delta\lambda_0)_{\min}. \quad (2-43)$$

Por tanto, si se tiene un poder de resolución alto (valor pequeño de $(\Delta\lambda_0)_{\min}$) también se tiene un intervalo espectral libre pequeño.

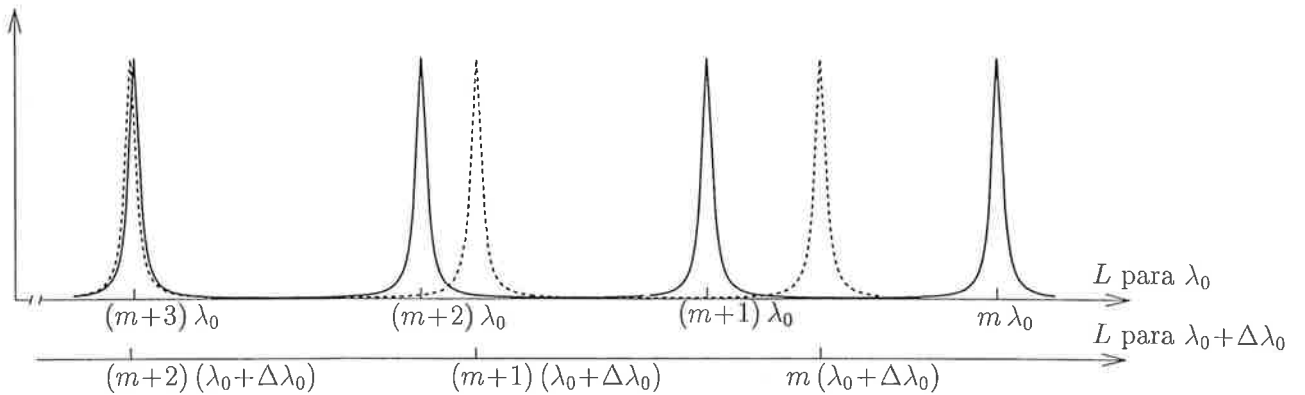


Figura 2-18 En esta figura el orden $(m+3)$ de λ_0 es sobrepasado por el orden $(m+2)$ de $\lambda_0 + \Delta\lambda_0$.

Debido a este pequeño intervalo espectral libre del interferómetro Fabry-Perot, es frecuente montarlo en serie con un espectroscopio de prisma o de red (véase la Fig. 2-19) que separe las diferentes regiones del espectro. El Fabry-Perot se encarga de separar las componentes muy juntas de cada región por separado.

[†]Nótese que el anillo de orden m correspondiente a $\lambda + \Delta\lambda$ está desplazado hacia el centro con respecto al anillo del mismo orden correspondiente a λ .

nuye el espesor de la lámina, el orden interferencial de los anillos disminuye, y eventualmente desaparecen cuando $2n'h < \lambda_0$ de acuerdo con la ecuación (2-25). Por tanto, en las películas delgadas se tienen órdenes de interferencia muy bajos, lo cual se puede utilizar para conseguir dispositivos muy selectivos de longitudes de onda. Actualmente lo más frecuente es utilizar apilamientos de películas dieléctricas de diferentes espesores y/o índices de refracción, que pueden ser periódicos o no. Estos son los llamados *sistemas ópticos de multicapas*, en los que el número de capas puede variar entre 1 en los sistemas más simples y económicos y más de 100.000 en las multicapas periódicas preparadas por variaciones del índice de refracción del substrato. El análisis teórico de estos sistemas sigue un tratamiento similar al de lámina única (sección 2.4), pero introduciendo matrices características del apilamiento que permitan el cálculo por ordenador. El lector interesado puede consultar el capítulo 17 de *Optica Electromagnética vol.II*. Como las aplicaciones de estos sistemas cada vez son más numerosas e importantes, a continuación se discuten dos ejemplos muy sencillos de una sola capa a modo de ilustración: los *filtros interferenciales* y las *láminas antirreflectantes*.

2.6.1 Filtros interferenciales

El filtro interferencial más simple consiste en una película delgada emparedada entre dos superficies de alta reflectancia (preferiblemente de multicapas dieléctricas), es decir constituye un interferómetro Fabry-Perot cuyo grosor h de lámina es del orden de la longitud de onda de la luz (Fig. 2-20). Usualmente se prepara para trabajar a incidencia normal, de modo que si n' es el índice de refracción de la película, de acuerdo con (2-25), habrá máximos de transmisión para:

$$2n'h = m\lambda_0 \quad (m = 1, 2, \dots); \quad (2-44)$$



Figura 2-20 Elementos básicos de un filtro interferencial sencillo.

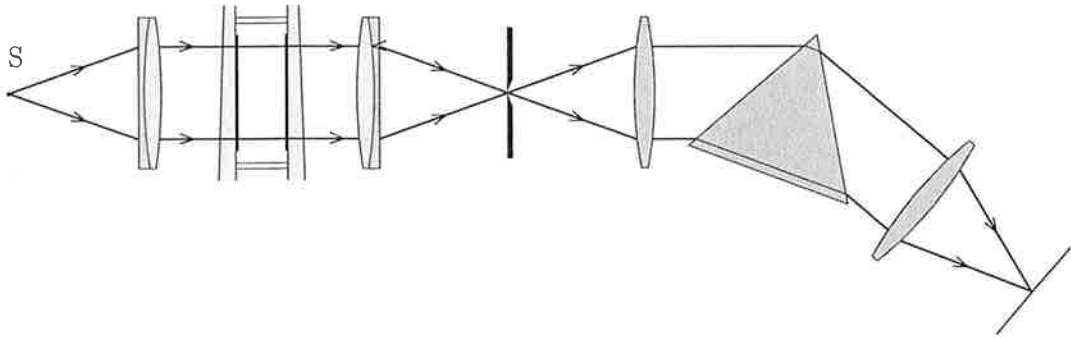


Figura 2-19 Tandem formado por un espectroscopio de prisma y un interferómetro Fabry-Perot, para conseguir al mismo tiempo amplio intervalo espectral libre y elevado poder de resolución.

2.5.5 Resumen de características

A continuación se da un resumen de los parámetros que caracterizan al interferómetro de Fabry-Perot:

1. Finura de los anillos: $\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{R_1}}{1 - R_1}$.
2. Pico de transmisión: $\tau = \left(\frac{I_t}{I_i}\right)_{\max} = \left(1 - \frac{A_1}{1 - R_1}\right)^2$.
3. Factor de contraste: $\mathcal{C} = \frac{(I_t/I_i)_{\max}}{(I_t/I_i)_{\min}} = \left(\frac{1 + R_1}{1 - R_1}\right)^2$.
4. Poder de resolución espectral: $P_{\text{re}} = \frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda_0)_{\min}} = m\mathcal{F}$.
5. Intervalo espectral libre: $(\Delta\lambda_0)_{\text{ie}} = \frac{\lambda_0}{m} = \mathcal{F}(\Delta\lambda_0)_{\min}$.

Al subir la reflectancia de las caras R_1 mejoran los parámetros 1, 3 y 4; y empeora el 2. Al utilizar un orden interferencial m mayor (aumentando h), mejora 4 y empeora 5.

2.6 Interferencias múltiples en películas delgadas

Las interferencias múltiples también se pueden observar en películas delgadas si se mantiene el paralelismo de las caras en una extensión suficiente. A medida que se dismi-

si se elige el producto $2n'h$ de manera que sea igual a la λ_0 que deseamos que sea transmitida, habrá un máximo ($m=1$) muy agudo para esta λ_0 y no serán transmitidas en absoluto todas las longitudes de onda mayores; de entre las longitudes de onda menores que λ_0 , sólo serán transmitidas aquéllas que sean un submúltiplo exacto de λ_0 , $\lambda_m = \lambda_0/m$. Éstas están muy separadas de λ_0 y pueden ser bloqueadas fácilmente haciendo que el substrato contenga algún colorante que las absorba. Las características del filtro serán las mismas que las del interferómetro Fabry-Perot (véase la subsección 2.5.5). Por ejemplo, si la λ_0 prefijada es de 500 nm y la finura es $\mathcal{F} = 100$, la anchura de banda del filtro se puede calcular usando la fórmula (2-41), es decir $(\Delta\lambda_0)_{\min} = \lambda_0/\mathcal{F} = 5$ nm. También se puede diseñar el filtro para un orden superior al $m=1$ del caso anterior, en cuyo caso el colorante deberá absorber también los órdenes inferiores.

2.6.2. Películas antirreflectantes

Toda superficie de separación entre dos dieléctricos diferentes refleja parte de la luz que incide sobre ella; por ejemplo, la energía reflejada en una frontera aire-vidrio es aproximadamente el 4 % para incidencia normal, y mayor para ángulos mayores. En muchos casos prácticos interesa eliminar esta reflexión, bien sea porque al existir muchos elementos ópticos en el sistema se pierde demasiada energía o simplemente porque resulta molesta (reflejos de las pantallas de televisión o de los “cristales” de las gafas). Esta luz reflejada se puede evitar en gran medida depositando una película dieléctrica sobre la superficie en cuestión. Sean n_0 , n y n_s los índices de refracción del medio exterior, de la película y del substrato, respectivamente y h el espesor de la película (Fig. 2-21). Para conseguir reflectancia cero, se hace que el rayo **1**, reflejado en la cara externa de la película, esté en oposición de fase con respecto a todos los restantes (**2**, **3**, ...), y que su amplitud sea igual a la de la suma de todos los demás. Como se demuestra a continuación, ambas condiciones se pueden conseguir si $n_0 < n < n_s$, es decir si las reflexiones para incidencia hacia abajo son “duras” en las dos caras de la lámina. Supondremos el caso más frecuente en que el medio exterior es el aire, es decir $n_0 = 1$. Sobre la figura se han indicado los factores de reflexión y transmisión de Fresnel r, r', t, t' correspondientes a la cara superior de la película, y el de reflexión r_s de la cara inferior.

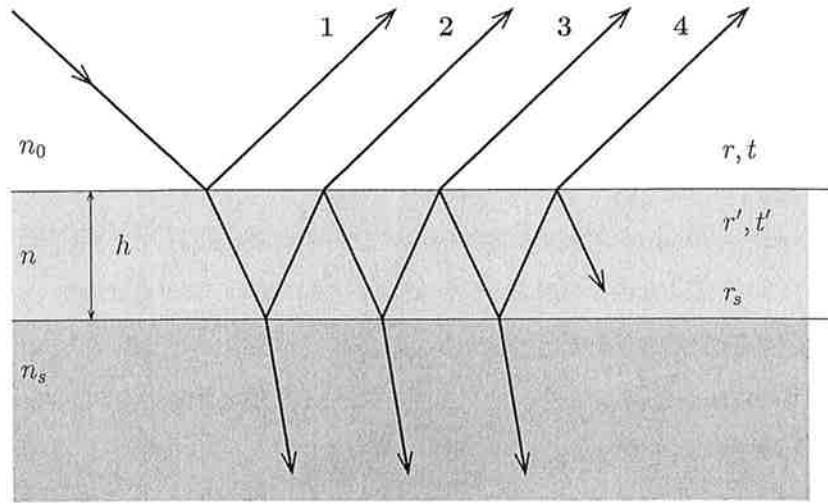


Figura 2-21 Principio de operación de una película antirreflectante. Aunque los rayos se dibujan inclinados para poder observarlos separados, el cálculo se hace para incidencia normal.

Para que la diferencia de fase entre el rayo **1** y el **2** sea π en incidencia normal, se debe cumplir:

$$\delta_{1,2} = \frac{4\pi n h}{\lambda_0} = \pi \quad \rightarrow \quad h = \frac{\lambda_0}{4n} = \frac{\lambda}{4}, \quad (2-45)$$

siendo λ la longitud de onda dentro de la película. Por otra parte, la condición para que estén en fase entre sí los rayos **2**, **3**, **4**, etc., será:

$$\delta_{2,3} = \delta_{3,4} = \dots = \frac{4\pi n h}{\lambda_0} + \pi = 2\pi, \quad (2-46)$$

donde se ha introducido el desfase adicional π debido a que la reflexión en el sustrato es “dura” ($r_s < 0$). Esta condición es idéntica a la anterior por lo que eligiendo el espesor de la película de acuerdo con la expresión (2-45) se cumple automáticamente la primera de las exigencias.

Para imponer ahora la condición de igual amplitud para el rayo **1** y la suma de todos los demás, procederemos de forma análoga a como se ha hecho en la sección 2.4.1. Para simplificar el cálculo, tendremos en cuenta la condición (2-46), es decir, $e^{i\delta_{2,3}} = 1$ donde están incluidos los cambios de signo de r y de r_s . Por tanto, se debe cumplir,

$$|r| E_i = t t' |r_s| E_i + t t' |r_s|^2 r' E_i + t t' |r_s|^3 r'^2 E_i + \dots \quad (2-47)$$

que se puede escribir en la forma siguiente:

$$|r| = t t' |r_s| (1 + |r_s| r' + |r_s|^2 r'^2 + \dots) = t t' |r_s| \frac{1}{1 - r' |r_s|} \quad (2-48)$$

y teniendo en cuenta ahora las relaciones de Stokes (2-17), se llega finalmente a:

$$|r| = |r_s| \rightarrow \frac{n - 1}{n + 1} = \frac{n_s - n}{n_s + n}, \quad (2-49)$$

la última ecuación se ha obtenido utilizando las fórmulas de Fresnel en incidencia normal y de ella se obtiene la condición:

$$n = \sqrt{n_s}, \quad (2-50)$$

la cual determina el índice de refracción que debe tener el material de la película.

Desgraciadamente, para una situación tan común como es la frontera aire-vidrio donde $n_s \simeq 1,5$, el valor $n \simeq \sqrt{1,5} = 1,22$ es demasiado pequeño para que exista un material sólido con ese índice. Aun así, si se utiliza MgF_2 con $n_s = 1,38$ sustituyendo estos valores numéricos en la fórmula de Fresnel correspondiente se obtiene $R = r^2 \simeq 1\%$. Es decir, se disminuye la luz reflejada en un factor cuatro aproximadamente. Para obtener recubrimientos antirreflectantes más eficientes y para un intervalo grande de longitudes de onda, es necesario utilizar más capas y realizar el análisis mediante el método de la matriz característica.

Capítulo 3

Teoría escalar de la difracción

3.1. Introducción

En los dos primeros capítulos de este bloque se ha estudiado el fenómeno de la interferencia de haces luminosos desde un punto de vista escalar. La observación de franjas de interferencia se considera una evidencia experimental del carácter ondulatorio de la luz, y pone de manifiesto una de las limitaciones de la óptica geométrica. Las limitaciones de la aproximación geométrica también se ponen de manifiesto por su incapacidad para explicar el fenómeno de la *difracción*. Este hecho se discutió de forma cualitativa en el capítulo 11 de la Óptica Electromagnética, al examinar críticamente la condición $\lambda \rightarrow 0$ requerida por dicha aproximación geométrica. Allí se vió que cuando un haz de luz colimado pasa a través de un orificio, diverge a partir del orificio con un ángulo dado por $\theta \sim \lambda/D$, siendo D el diámetro del orificio. Como en la vida corriente suele cumplirse que $D \gg \lambda$, el efecto es pequeño y suele pasar desapercibido.

Una situación familiar, en la que se pone de manifiesto la difracción, ocurre cuando se observan en detalle los bordes de la sombra de un objeto, producida por la luz solar que penetra por la ventana de una habitación; se encuentran unas franjas claras y oscuras más o menos difusas en vez de una división nítida entre luz y oscuridad (Fig. 3-1a). Un caso de mayor trascendencia es la mancha de luz que produce en la región de la imagen (de un objeto puntual) un sistema óptico aunque esté bien corregido de aberraciones. En vez de la imagen puntual predicha por la óptica de rayos, se observa un círculo brillante de cierta extensión rodeado de unos pocos anillos, tanto más débiles cuanto mayor es el radio (Fig. 3-1b). En la mayoría de los casos esta mancha de luz es demasiado pequeña

para que sea observable a simple vista, pero tiene una influencia fundamental en la calidad de la imagen final dada por los instrumentos ópticos.

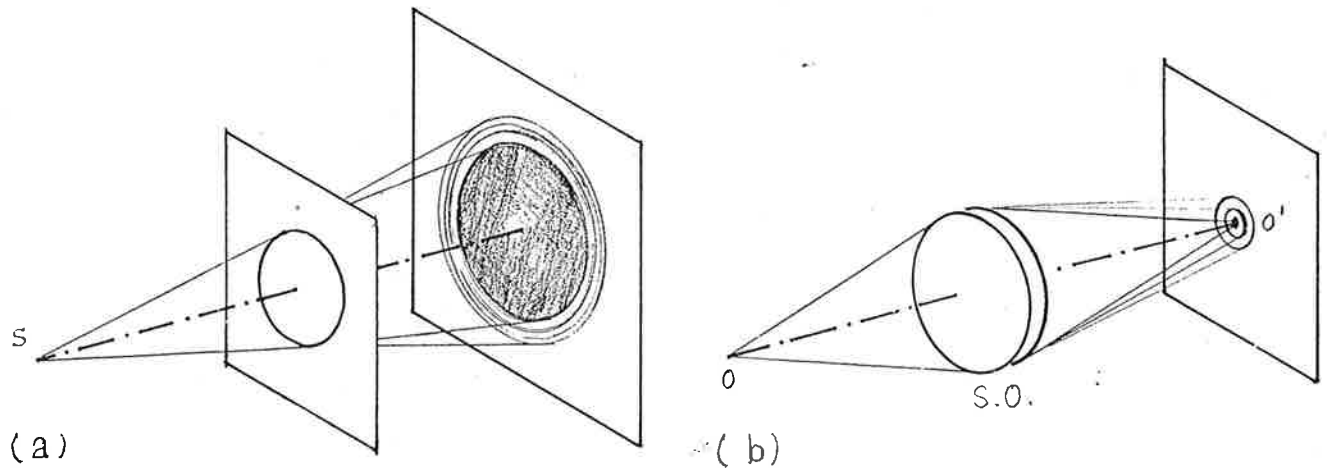


Figura 3-1 Presencia del fenómeno de la difracción en el borde de una sombra (a) y en la región de la imagen de un sistema óptico (b). En ambos casos se ha exagerado el tamaño de las franjas en beneficio de la claridad de la figura.

El estudio riguroso de la difracción es muy complejo y sólo se ha abordado para unos pocos ejemplos simples. En este capítulo y en los dos siguientes se utilizarán métodos aproximados, basados en un modelo escalar de la luz, cuyas ideas fundamentales se deben a *Huygens*, *Fresnel* y *Kirchhoff*. Las aproximaciones que se hacen son muy restrictivas, pero el tratamiento matemático se simplifica mucho y permite adquirir una buena comprensión física del problema de manera asequible. Desde el punto de vista práctico, la interpretación que suministra esta teoría de la difracción sobre el proceso de formación de la imagen, constituye una excelente herramienta para optimizar el diseño y el rendimiento de los instrumentos ópticos.

3.2 El principio de Huygens-Fresnel

La primera referencia a los fenómenos de difracción aparece en un trabajo de *Leonardo da Vinci*, pero sólo son descritos con cierto detalle por primera vez por *Grimaldi* en un trabajo publicado en 1665, dos años después de su muerte. El modelo corpuscular de la

luz que predominaba en aquella época no podía explicar la difracción. Lo más probable es que *Huygens*, el único defensor del modelo ondulatorio en esos momentos, desconociera el trabajo de Grimaldi, porque en otro caso no hay duda que lo habría utilizado en apoyo de su modelo. La explicación satisfactoria de la difracción utilizando el modelo ondulatorio no llegó hasta 1818. En ese año apareció una célebre memoria de *Fresnel* en la que demostraba que la difracción se podía explicar utilizando simultáneamente el principio de Huygens y el principio de interferencia. Es decir, en su tratamiento de la propagación de la luz, Fresnel tiene en cuenta tanto la amplitud como la fase de las ondas.

De acuerdo con este *principio de Huygens-Fresnel*, cada punto de un frente de onda se puede suponer como un centro secundario de perturbación que emite onditas esféricas (*principio de Huygens*). Por otra parte, la perturbación total que llega a otro punto arbitrario posterior es el resultado de la interferencia de todas las onditas secundarias coherentes originadas en el frente de onda considerado (*añadido de Fresnel*). Consideremos para concretar el caso del frente de onda esférico de la figura 3-2 correspondiente a una onda monocromática en la que prescindiremos del factor $e^{-i\omega t}$. Si designamos por E_i la amplitud de la onda incidente en el punto N, la ondita secundaria procedente de este punto N contribuirá a la amplitud en el punto P de forma proporcional a E_i y al tamaño del elemento $d\Sigma$ que se toma como emisor secundario; además, hay que incluir el factor de propagación e^{ikr}/r correspondiente a una ondita esférica desde N hasta P. Es decir, salvo un factor constante que carece de importancia cuando interesan los valores relativos, se puede escribir:

$$dE_P = E_i d\Sigma \frac{e^{ikr}}{r} f(\chi). \quad (3-1)$$

El factor $f(\chi)$ que se ha añadido es conocido como *factor de inclinación* y constituye otra contribución importante de Fresnel. Al introducirlo intuitivamente, Fresnel considera que la amplitud de las ondas secundarias de Huygens depende de la dirección de propagación, siendo máxima en la dirección $\chi = 0$, $f(0) = f_{\max}$, y nula en la dirección perpendicular $f(\pi/2) = 0$. Por otra parte, teniendo en cuenta que la onda incidente que procede de S

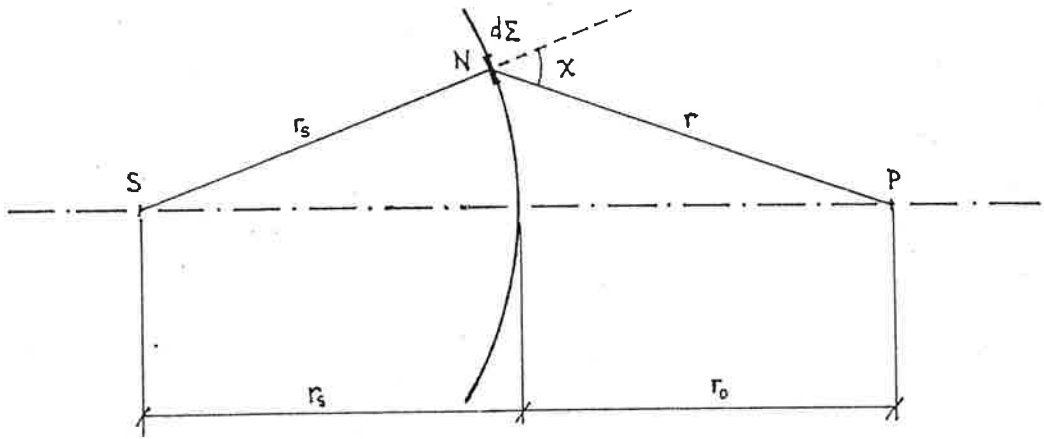


Figura 3-2 Contribución de la fuente secundaria $d\Sigma$ de un frente onda esférico a la amplitud del campo en un punto P, de acuerdo con el *principio de Huygens-Fresnel*.

también es esférica y recorre una distancia r_s , se puede escribir:

$$E_i = E_0 \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \quad (3-2)$$

y finalmente, la amplitud en P resultante de todas las contribuciones, será:

$$E_P = \int_{\Sigma} E_0 \frac{e^{ik(r_s+r)}}{r_s r} f(\chi) d\Sigma. \quad (3-3)$$

Esta fórmula, introducida por Fresnel de forma más o menos empírica, se ha mostrado extraordinariamente útil y, salvo mínimas modificaciones, se sigue utilizando actualmente en la mayoría de los problemas ordinarios de difracción.

En 1882 *Kirchhoff* dio una justificación matemática sólida de la integral de Fresnel (3-3) utilizando la ecuación de ondas escalar, es decir la llamada teoría elástica de la luz (todavía no existía familiaridad con la teoría electromagnética de Maxwell). Desde entonces muchos autores han discutido el tema extensamente. En las secciones que siguen se desarrolla esta justificación y se discuten sus límites de validez. En particular, se obtiene una expresión analítica del factor de inclinación $f(\chi)$, fórmula (3-16), matizando las suposiciones de Fresnel. Por tanto, el principio de Huygens-Fresnel se puede considerar una consecuencia aproximada de la ecuación de ondas. Por su interés intrínseco y como ilustración de la utilidad de este modelo, en la sección 3.6 se discute la aplicación

que hizo el propio Fresnel de dicha fórmula para explicar un hecho bien conocido: la propagación de una onda esférica (como la ilustrada en la Fig. 3-2) en el espacio libre.

3.3 Teoría electromagnética. Aproximación escalar

Desde el punto de vista de la teoría electromagnética de Maxwell, la difracción hay que tratarla como un problema de contorno, siendo las fuentes de luz singularidades apropiadas de las funciones de onda. El análisis riguroso exige especificar el carácter vectorial del campo electromagnético, su polarización, y no sólo su intensidad. Esto hace que la solución rigurosa de los problemas de difracción sea difícil, y que hasta ahora sean escasas las geometrías para las que se ha encontrado una solución analítica que se pueda considerar rigurosa. La primera de estas soluciones la dio Sommerfeld en 1896 en un importante artículo en el que discutió la difracción de una onda plana infinita por una pantalla plana semiinfinita de un metal idealmente conductor. A pesar de ser una geometría muy sencilla e idealizada la solución suministra una información muy útil. Así, en la zona de sombra de la pantalla la solución se propaga bajo la forma de una onda cilíndrica que aparentemente procede del borde de la pantalla, mientras que en la zona iluminada consiste en la superposición de la onda cilíndrica y de la onda incidente original. Esto dio un soporte matizado a la existencia de la *onda de borde* postulada por el propio Young para explicar cualitativamente la difracción en términos de la interferencia de las ondas que se “reflejaban” en el borde del orificio con la onda directa que pasaba a través de la abertura. Después del artículo de Sommerfeld se han encontrado soluciones rigurosas de un reducido número de otros problemas, principalmente bidimensionales, y también se ha comprobado que el modelo de la onda de borde de Young se cumple con buena aproximación en bastantes casos.[†]

Sin embargo, debido a las dificultades matemáticas de la teoría rigurosa, en la mayoría de los casos de interés es más práctico utilizar métodos aproximados. La primera simplificación que se realiza es la llamada *aproximación escalar*, en la que se desprecia

[†]véase: M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics*. Pergamon Press, Oxford, 6ª edición, 1980; sección 8.9.

la polarización de la luz, es decir, el carácter vectorial del campo óptico. La transición del campo óptico vectorial al campo escalar se ha justificado con detalle para el caso de luz polarizada natural,[†] Afortunadamente, en los casos más importantes y frecuentes, las figuras de difracción resultan poco sensibles a la polarización de la luz, así como a la materia de que está hecho el difractor. Este es el caso de la situación experimental típica en que la longitud de onda es mucho más pequeña que el elemento difractor, y éste mucho más pequeño que la distancia a la fuente y al punto de observación, es decir, de acuerdo con la figura 3-2,

$$\lambda \ll \sqrt{\Sigma} \ll r_s, r. \quad (3-4)$$

En la aproximación escalar, la intensidad I (magnitud macroscópica de interés) se puede representar aproximadamente por medio de una función de onda escalar compleja $\xi(\vec{r}, t)$:

$$I = \langle |\vec{E} \times \vec{H}| \rangle \propto |\xi|^2. \quad (3-5)$$

La función compleja ξ contiene información sobre la fase de la onda, pero no contiene información sobre su polarización. Esta función satisface la ecuación de ondas:

$$\nabla^2 \xi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0. \quad (3-6)$$

La relación exacta con I normalmente carece de interés en el caso de la difracción, porque lo importante son las *variaciones relativas* de intensidad en las “franjas” de difracción.

3.4 Teorema de la integral de Kirchhoff

La justificación que dió Kirchhoff de la integral de Fresnel se basa en primer lugar en la aproximación escalar mencionada en el sección anterior, y en segundo lugar en un teorema denominado de la *integral de Kirchhoff*. Este teorema permite encontrar la función de onda en un punto P (como, por ejemplo, el de la Fig. 3-2), mediante una integral que tiene cierta similitud con el tratamiento de Fresnel. El procedimiento típico

[†]véase: M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics*. Pergamon Press, Oxford, 6ª edición, 1980, sección 8.4.

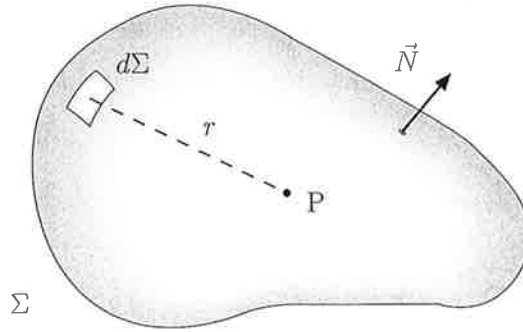


Figura 3-3 Ilustración de una superficie cerrada arbitraria Σ que permite obtener la amplitud en el punto P por medio de la integral de Kirchhoff.

consiste en calcular la perturbación ξ en P como una solución de la ecuación de ondas (3-6), exigiéndole además que satisfaga las condiciones de contorno del problema (fuentes de luz, obstáculos). Por su parte, el teorema de la integral de Kirchhoff demuestra que la solución de la ecuación de ondas en el punto arbitrario P, también se puede encontrar a partir de los valores que tiene ξ y su derivada ξ' en todos los puntos de una superficie cerrada arbitraria Σ que rodea a P. Así, considerando una onda estrictamente monocromática,

$$\xi(\vec{r}, t) = E(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3-7)$$

el citado teorema afirma que la amplitud escalar $E(\vec{r})$ en el punto P viene dada por la siguiente integral:

$$E_P = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left[\frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial E}{\partial N} - E \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right] d\Sigma, \quad (3-8)$$

donde, como se indica en la figura 3-3, r es la distancia desde $d\Sigma$ al punto P, y las derivadas respecto de N son derivadas direccionales a lo largo de la normal a la superficie definida por el vector unitario normal \vec{N} . En el apéndice 3.9.1 se da una demostración de (3-8) usando el teorema de Green. Para el caso de ondas no monocromáticas, también se puede obtener una expresión análoga mediante el análisis de Fourier.

Al expresar la amplitud de la onda en P mediante una integral de superficie, Kirchhoff se asemeja al método de Fresnel que integra sobre el frente de onda, pero se requieren algunos pasos adicionales, que también dió Kirchhoff como se indica en la sección siguiente.

3.5 Aplicación de la integral de Kirchhoff a la difracción

Realizando una serie de aproximaciones, Kirchhoff mostró que su integral de superficie (3-8) se puede reducir a otra mucho más sencilla que es equivalente a la integral de Fresnel. Además, se obtiene una fórmula explícita del factor de inclinación $f(\chi)$ que quedaba indeterminado en la formulación de Fresnel.

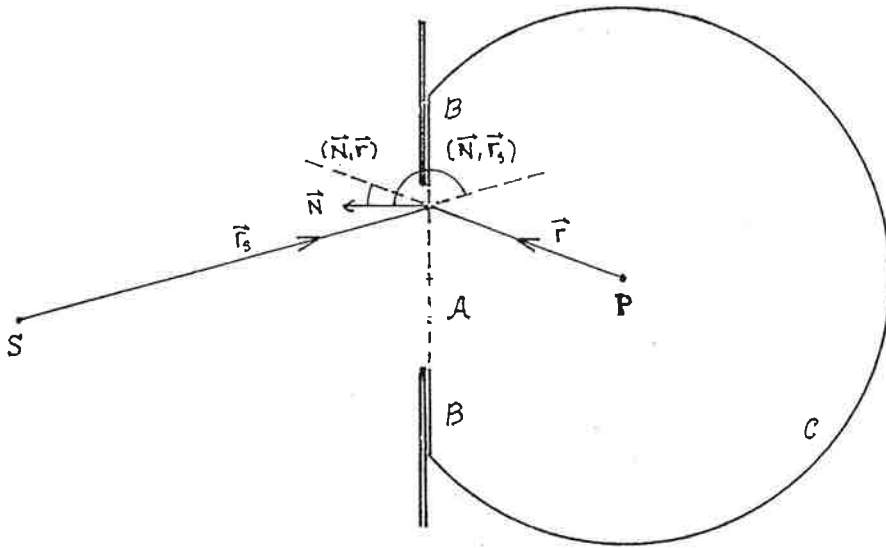


Figura 3-4 Superficie de integración usada para aproximar la integral de Kirchhoff a la de Fresnel.

Consideremos el caso de una onda monocromática procedente de una fuente puntual S , que se propaga a través de una abertura A en una pantalla opaca plana (Fig. 3-4). Para calcular la perturbación en P mediante la integral (3-8), se toma como superficie de integración la formada por: la abertura A , dos porciones B de la pantalla vecinas de la abertura y, para completar, una porción C de una superficie esférica con centro en P y radio muy grande. Por tanto, la integral sobre toda la superficie Σ se descompone en tres sumandos:

$$\int_{\Sigma} = \int_A + \int_B + \int_C. \quad (3-9)$$

La dificultad está en que los valores que tienen E y $\partial E/\partial N$ sobre A , B y C nunca se conocen exactamente. La aproximación razonable consiste en suponer que sobre la

abertura \mathcal{A} los valores de E y $\partial E/\partial N$ no difieren apreciablemente de los valores que tendrían en ausencia de la pantalla, y sobre \mathcal{B} son cero. Al hacer esta aproximación, adquiere importancia la condición (3-4), $\lambda \ll \sqrt{\Sigma} \ll r_s, r$, con objeto de que los efectos del borde del orificio sobre los valores del campo tanto en \mathcal{A} como en \mathcal{B} se puedan considerar despreciables. Por otra parte, sobre \mathcal{C} todos los valores se pueden hacer cero tomando el radio tan grande que la perturbación no haya tenido tiempo de llegar. En resumen:

$$\begin{aligned} \text{sobre } \mathcal{A}: \quad E &= E_i, \quad \frac{\partial E}{\partial N} = \frac{\partial E_i}{\partial N} \\ \text{sobre } \mathcal{B} \text{ y } \mathcal{C}: \quad E &= 0, \quad \frac{\partial E}{\partial N} = 0. \end{aligned} \quad (3-10)$$

Estas son las *condiciones de frontera* de Kirchhoff sobre las que se basa su teoría de la difracción.

Puesto que ahora la integral (3-8) se extiende sólo sobre \mathcal{A} , las derivadas direccionales que aparecen en el integrando se pueden escribir de forma explícita. Teniendo en cuenta que el campo en la abertura es:

$$E_i = E_0 \frac{e^{ikr_s}}{r_s}, \quad (3-11)$$

se puede escribir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_i}{\partial N} &= \frac{\partial E_i}{\partial r_s} \frac{\partial r_s}{\partial N} = E_0 \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \left(ik - \frac{1}{r_s} \right) \cos(\widehat{N, r_s}) \\ \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) &= \frac{e^{ikr}}{r} \left(ik - \frac{1}{r} \right) \cos(\widehat{N, r}). \end{aligned} \quad (3-12)$$

En la figura 3-5 se recuerda el cálculo de la expresión $\partial r/\partial N = \cos(\widehat{N, r})$. Si ahora sustituimos en la integral (3-8) y tenemos en cuenta que, por ser $\lambda \ll r, r_s$, se pueden despreciar los términos en $1/r$ y $1/r_s$ frente a los términos en $ik = i2\pi/\lambda$, se obtiene la siguiente expresión conocida como *integral de difracción de Fresnel-Kirchhoff*:

$$E_P = \frac{iE_0}{2\lambda} \int_{\mathcal{A}} \frac{e^{ik(r_s+r)}}{r_s r} [\cos(\widehat{N, r_s}) - \cos(\widehat{N, r})] d\Sigma. \quad (3-13)$$

Para comparar esta expresión directamente con la fórmula de Fresnel (3-3) basta substituir la superficie de integración \mathcal{A} por el trozo del frente de onda Σ procedente de

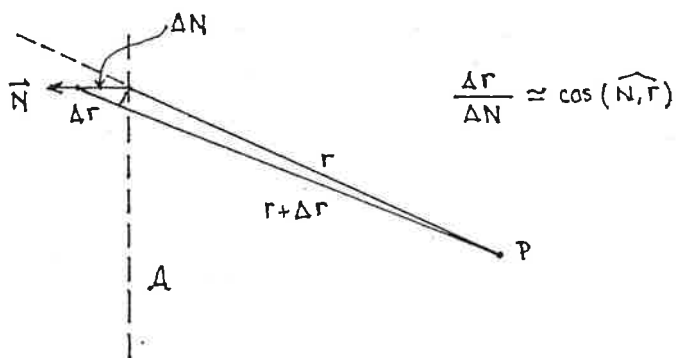


Figura 3-5 Recordatorio para el cálculo de la derivada direccional $\partial r / \partial N$.

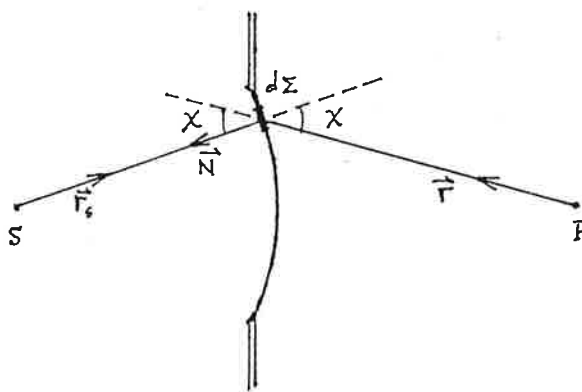


Figura 3-6 Sustitución de la superficie de integración \mathcal{A} por el trozo de frente de onda que mejor se adapte a \mathcal{A} .

que se adapte lo mejor posible a la abertura (Fig. 3-6). Entonces, sobre este frente de onda Σ se tiene:

$$\cos(\widehat{N, r_s}) = -1, \quad \cos(\widehat{N, r}) = \cos \chi, \quad (3-14)$$

con lo que la (3-13) queda:

$$E_P = -\frac{iE_0}{2\lambda} \int_{\Sigma} \frac{e^{ik(r_s+r)}}{r_s r} (1 + \cos \chi) d\Sigma. \quad (3-15)$$

Es decir, hemos obtenido una expresión idéntica a la de Fresnel (3-3), en la que, además, el "factor de inclinación" queda determinado por la siguiente expresión analítica:

$$f(\chi) = -\frac{i}{2\lambda} (1 + \cos \chi). \quad (3-16)$$

Como se ve, este factor es más complejo que lo que supuso Fresnel y contiene efectos

adicionales a la pura inclinación. De un lado indica que la amplitud de las ondas secundarias depende de λ , y éstas están desfasadas respecto a la incidente en un factor $-i = e^{-i\pi/2}$. De otro, el efecto puro de la inclinación viene dado por el factor:

$$g(\chi) = \frac{1}{2} (1 + \cos \chi) . \quad (3-17)$$

Tal como supuso Fresnel, $g(\chi)$ presenta valor máximo para $\chi=0$, $g(0)=1$; en cambio, $g(\pi/2)=1/2$ en vez de ser cero como había supuesto Fresnel. Por otra parte, el hecho de que $g(\pi)=0$ explica que no aparezca una onda de retroceso (que se propagaría hacia la fuente S).

3.6 Aplicación a la propagación de una onda esférica

Ahora que tenemos una expresión analítica completa (3-15) de la integral de Fresnel-Kirchhoff, la cual incluye la forma correcta del factor de inclinación (3-17), vamos a aplicarla a un caso cuyo resultado experimental es trivial, con objeto de comprobar su grado de validez en un caso práctico. En la figura 3-2 se ha supuesto que S es una fuente puntual que emite ondas esféricas monocromáticas, por lo que la amplitud de la onda en el punto P viene dada por:

$$E_P = E_0 \frac{e^{ik(r_s+r_0)}}{r_s + r_0} . \quad (3-18)$$

Por tanto, la aplicación de la integral de Fresnel en su forma (3-15) a un frente de onda como el representado en la figura 3-2, debe arrojar el mismo resultado (3-18).

Para demostrarlo, sigamos al propio Fresnel y utilicemos el llamado *método de las zonas de Fresnel*: tomando centro en el punto P se trazan (véase la Fig. 3-7) superficies esféricas de radios:

$$r_0, \quad r_1 = r_0 + \frac{\lambda}{2}, \quad r_2 = r_0 + 2 \frac{\lambda}{2}, \quad \dots \quad (3-19)$$

Estas superficies dividen el frente de onda Σ en una serie de zonas semiperiódicas $z_1, z_2, \dots, z_j, \dots$, caracterizadas porque los puntos correspondientes de dos zonas vecinas presentan una diferencia de fase π . Como se tiene $r_s, r \gg \lambda$, cada zona z_j es lo

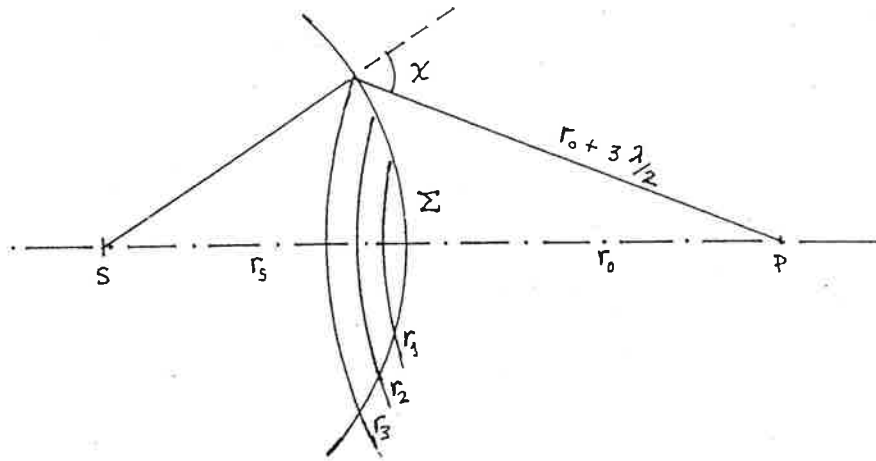


Figura 3-7 Construcción de las zonas de Fresnel en el frente de onda Σ para el punto P.

suficientemente pequeña como para suponer que el factor de inclinación $g_j(\chi)$ es constante en toda ella con buena aproximación. Entonces, la contribución de la zona z_j al campo en el punto P, se puede escribir:

$$(E_j)_P = -\frac{i}{\lambda} \frac{E_0 e^{ikr_s}}{r_s} g_j \int_{z_j} \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma. \quad (3-20)$$

La integral que aparece en esta expresión se calcula en el apéndice 3.9.2 y el resultado es:

$$\int_{r_{j-1}}^{r_j} \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma = -i \frac{2\lambda r_s e^{ikr_0}}{r_0 + r_s} (-1)^j. \quad (3-21)$$

Sustituyendo ahora esta expresión en (3-20) se obtiene,

$$(E_j)_P = -2 E_0 \frac{e^{ik(r_s+r_0)}}{r_s + r_0} (-1)^j g_j. \quad (3-22)$$

Para determinar el campo total en P basta sumar las contribuciones de todas las zonas, es decir:

$$E_P = \sum_j (E_j)_P = |E_1| - |E_2| + |E_3| - |E_4| + \dots \quad (3-23)$$

El propio Fresnel propuso un procedimiento muy práctico para efectuar esta suma teniendo en cuenta que con el factor $(-1)^j$ se hacen positivos los términos impares y

negativos los pares, y basándose en que el factor de inclinación debía ir disminuyendo lentamente al aumentar el ángulo χ . El procedimiento consiste en agrupar los términos de la siguiente manera:

$$E_P = \frac{|E_1|}{2} + \left(\frac{|E_1|}{2} - |E_2| + \frac{|E_3|}{2} \right) + \left(\frac{|E_3|}{2} - |E_4| + \frac{|E_5|}{2} \right) + \dots \quad (3-24)$$

De este modo, los paréntesis son nulos con muy buena aproximación y queda:

$$E_P = \frac{E_1}{2}. \quad (3-25)$$

La expresión para E_1 se obtiene haciendo $j=1$ en (3-22) y teniendo en cuenta que de la (3-17) se obtiene $g_1 = g(0) = 1$; sustituyendo esa expresión de E_1 en la anterior se llega a:

$$E_P = E_0 \frac{e^{ik(r_s+r_0)}}{r_s + r_0}. \quad (3-26)$$

Es decir, se obtiene la expresión correcta para la propagación de ondas esféricas en el espacio libre.

Anécdota

La teoría de Fresnel resultaba tan sorprendente en su tiempo que, cuando fue presentada a la Academia de Ciencias francesa, el académico Poisson se vió obligado a encontrar dónde estaba el fallo, y finalmente “demostró” que era errónea por medio de la reducción al absurdo. Poisson llegó a la conclusión, a partir de la teoría de Fresnel, de que si en un frente de onda esférico se tapa la primera zona de Fresnel por medio de un pequeño disco opaco, el centro de la sombra proyectada por el disco debería aparecer brillante con la misma intensidad que si no estuviera el disco. En efecto, si se elimina la primera zona de Fresnel, y se reagrupan de nuevo los términos en (3-24) pero sin E_1 , se tendrá $E_P = E_2/2 \simeq E_1/2$, es decir, prácticamente la misma amplitud que sin disco. Este resultado, procedente de una aplicación correcta de la teoría, era absurdo para Poisson. Sin embargo, muy pocos días después de que Poisson comunicara su resultado, Fresnel y Arago se presentaron con el resultado experimental de que en el centro de la sombra del disco había un punto brillante. Irónicamente, dicho punto se denomina ahora “punto de Poisson”.

En realidad se pueden hacer otras combinaciones parecidas a la de Poisson y se obtienen resultados también “sorprendentes”, que son confirmados aproximadamente por los experimentos. Por ejemplo, si se utiliza una pantalla complementaria a la de Poisson, es decir se tapan todas las zonas excepto la primera, se tiene $E_P = E_1$ que es el doble de la amplitud resultante cuando contribuyen todas las zonas y por tanto una intensidad cuádruple, $(I_1)_P = 4(I_{\text{todas}})_P$. Conviene indicar que, a pesar de las apariencias y como es típico de los fenómenos interferenciales, la energía total se sigue conservando (sólo se ha redistribuido espacialmente). Estos ejemplos ilustran el poder del método de Fresnel para manipular los frentes de onda luminosos en muchas aplicaciones, como de hecho tendremos ocasión de hacer en capítulos posteriores.

3.7 Comentarios adicionales sobre la integral de Fresnel-Kirchhoff

1. La integral de Fresnel-Kirchhoff (3-13) presenta simetría con respecto a las posiciones S de la fuente puntual y P del punto de observación. Esto significa que si la fuente luminosa se sitúa en la posición P, produce en el punto S el mismo efecto que producía en P cuando se encontraba en S. Este resultado se conoce como *principio de reciprocidad de Helmholtz*.
2. En el análisis que ha llevado a la integral (3-13) se ha utilizado una fuente puntual y por tanto ondas incidentes sobre el orificio que son esféricas. El análisis se puede extender a casos de ondas más complicadas y se llega a resultados equivalentes, siempre que los radios de curvatura en cada punto del frente de onda sean mucho mayores que λ .
3. La distribución de amplitud $(E_a)_P$ que se obtiene cuando la luz se difracta a través de una cierta pantalla a , sumada a la amplitud $(E_b)_P$ que se obtiene de la pantalla b complementaria de la a , debe ser igual a la amplitud E_P en P cuando no hay ninguna pantalla en la trayectoria de la luz (porque a y b ocultan las zonas

semiperiódicas complementarias):

$$E_P = (E_a)_P + (E_b)_P. \quad (3-27)$$

Este resultado se conoce como *principio de Babinet* de las pantallas complementarias. Esto implica que si $E_a = 0$, se tiene $E_b = E$, es decir que si la intensidad es cero en presencia de una de las pantallas, la intensidad en presencia de la otra pantalla es la misma que si no hubiera ninguna pantalla. Por otra parte, si $E_P = 0$ se tiene $E_a = -E_b$ (las fases de E_a y de E_b difieren en π) y las intensidades son iguales, $I_a = I_b$.

4. Las repercusiones de las restrictivas condiciones de contorno de Kirchhoff (3-10) para justificar la integral de Fresnel han sido sometidas a muchas discusiones críticas. Quizás la más directa es que la integral de Fresnel-Kirchhoff no reproduce los valores que se han supuesto para el campo sobre la pantalla (valor cero) y en el plano de la abertura (valor idéntico al de la onda incidente). Sin embargo, a pesar de éste y otros fallos, y gracias a que se cumple muy bien la condición $\lambda \ll \sqrt{\Sigma} \ll r, r_s$, la citada integral es extraordinariamente adecuada para la mayoría de los problemas de difracción de la luz (en particular los relacionados con los instrumentos ópticos). De ahí que el primitivo tratamiento de Fresnel siga siendo hoy día el método aproximado más eficiente y el más usado. En aquellos problemas relativos al comportamiento del campo en las proximidades de los orificios y obstáculos, hay que usar el tratamiento electromagnético completo, incluyendo el carácter vectorial del campo óptico. Ya se ha mencionado que son muy pocos los problemas que se han resuelto con el método riguroso.

3.8 Difracción de Fraunhofer y difracción de Fresnel

En las condiciones experimentales más frecuentes, la integral de Fresnel-Kirchhoff (3-13) puede simplificarse considerablemente, y esta simplificación da lugar a dos expresiones aproximadas útiles que se denominan *difracción de Fraunhofer* y *difracción de*

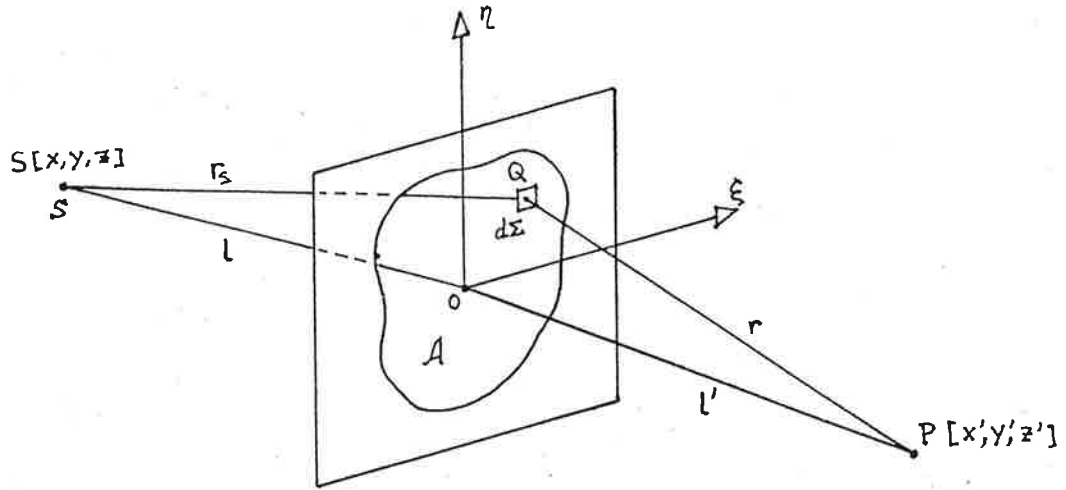


Figura 3-8 Elección de un sistema de ejes bidimensional (ξ, η) , para el análisis de la difracción de Fraunhofer y de la difracción de Fresnel.

Fresnel. Debido a que se cumple $\lambda \ll \sqrt{A} \ll r, r_s$, a medida que el elemento $d\Sigma$ explora el dominio de integración \mathcal{A} , la magnitud $r_s + r$ cambiará en general en muchas λ , de modo que el factor $e^{ik(r_s+r)}$ oscilará rápidamente. En cambio, el factor $\cos(\widehat{n, r_s}) - \cos(\widehat{n, r})$ no variará apreciablemente sobre la abertura, y lo mismo ocurre con el denominador $r_s r$ que puede sustituirse por la constante ll' (véase la Fig. 3-8), de modo que la integral (3-13) se puede escribir:

$$E_P = \frac{iE_0}{2\lambda} \frac{[\cos(\widehat{N, r_s}) - \cos(\widehat{N, r})]}{ll'} \int_{\mathcal{A}} e^{ik(r_s+r)} d\Sigma = C \int_{\mathcal{A}} e^{ikf(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad (3-28)$$

donde C es una constante y la función $f(\xi, \eta)$, definida en los nuevos ejes $(O\xi\eta)$ tomados sobre la abertura, viene dada por la relación

$$r_s(\xi, \eta) + r(\xi, \eta) = l + l' + f(\xi, \eta). \quad (3-29)$$

Teniendo en cuenta la figura 3-8, es fácil obtener la expresión de la función $f(\xi, \eta)$. Si las coordenadas de la fuente S , el punto de observación P y el punto de integración sobre la pantalla Q son respectivamente $S[x, y, z]$, $P[x', y', z']$ y $Q[\xi, \eta, 0]$, se tendrá:

$$r_s = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2} = l \sqrt{1 - \frac{2(x\xi + y\eta)}{l^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{l^2}}. \quad (3-30)$$

Si ahora se desarrolla en serie de potencias de los dos últimos términos (muy pequeños), la anterior expresión se escribe (hasta los términos cuadráticos en ξ y η):

$$r_s = l \left(1 - \frac{x\xi + y\eta}{l^2} + \frac{\xi^2 + \eta^2}{2l^2} - \frac{1}{8} \frac{4(x\xi + y\eta)^2}{l^4} + \dots \right) \quad (3-31)$$

$$r_s \simeq l + \alpha\xi + \beta\eta + \frac{1}{2l} [\xi^2 + \eta^2 - (\alpha\xi + \beta\eta)^2],$$

donde se han introducido los cosenos directores del vector de onda incidente \vec{k}_i ,

$$\alpha = -\frac{x}{l}, \quad \beta = -\frac{y}{l}, \quad (3-32)$$

que son de signo opuesto a los del vector \overline{OS} . Del mismo modo se obtiene una expresión análoga para r :

$$r \simeq l' - \alpha'\xi - \beta'\eta + \frac{1}{2l'} [\xi^2 + \eta^2 - (\alpha'\xi + \beta'\eta)^2], \quad (3-33)$$

donde se han introducido los cosenos directores del vector de onda difractado \vec{k}_d ,

$$\alpha' = \frac{x'}{l'}, \quad \beta' = \frac{y'}{l'}, \quad (3-34)$$

que son del mismo signo que los del vector \overline{OP} . Finalmente, substituyendo los valores de r_s y r en (3-29) se llega a la expresión:

$$f(\xi, \eta) \simeq (\alpha - \alpha')\xi + (\beta - \beta')\eta + \frac{1}{2} (\xi^2 + \eta^2) \left(\frac{1}{l} + \frac{1}{l'} \right) - \frac{(\alpha\xi + \beta\eta)^2}{2l} - \frac{(\alpha'\xi + \beta'\eta)^2}{2l'}. \quad (3-35)$$

En una situación experimental en la que tanto la fuente S como el punto de observación P se encuentren infinitamente alejados, los únicos términos que no se anulan son los dos primeros (de primer grado). Entonces, substituyendo la función $f(\xi, \eta)$ en la integral (3-28) se tiene,

$$E_P = C \int_{\mathcal{A}} e^{ik[(\alpha - \alpha')\xi + (\beta - \beta')\eta]} d\xi d\eta. \quad (3-36)$$

En la constante C aparece englobado el factor E_0/l de la onda esférica que al convertirse en plana debe ser constante. Esta situación experimental ocurre, por ejemplo, cuando S se encuentra en el foco objeto de una lente convergente situada delante de \mathcal{A} , y P se encuentra en el foco imagen de otra lente situada detrás de \mathcal{A} (véase la Fig. 3-9), y recibe el nombre de *difracción de Fraunhofer*. Como veremos en el capítulo siguiente, ésta es la situación más característica en los instrumentos ópticos.

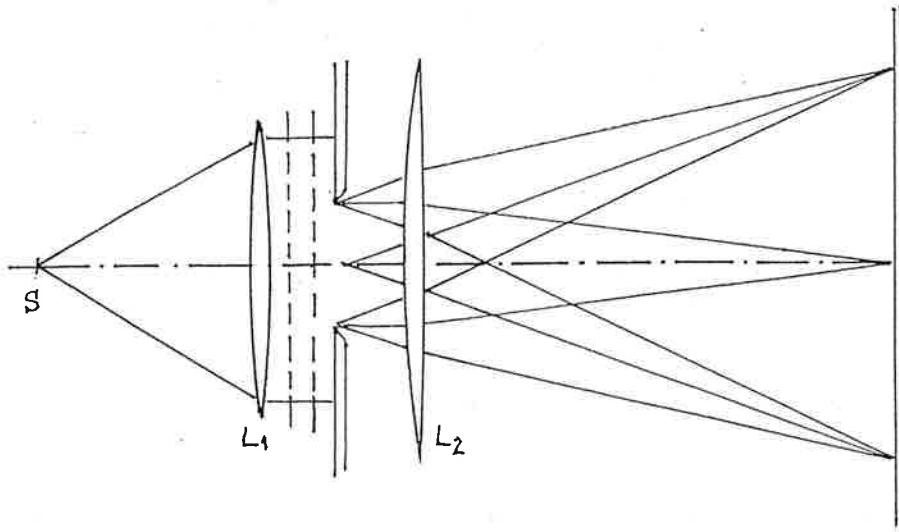


Figura 3-9 Geometría experimental típica en la que se tiene difracción de Fraunhofer.

Si la abertura no es uniformemente transparente, podemos incluir su función de transmisión $\tau(\xi, \eta)$ en el integrando de (3-36) junto con la constante C ; si hacemos $E(\xi, \eta) = C \tau(\xi, \eta)$, podemos escribir:

$$E_P = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi, \eta) e^{ik[(\alpha - \alpha')\xi + (\beta - \beta')\eta]} d\xi d\eta. \quad (3-37)$$

Los límites de integración se han extendido hasta infinito puesto que $E(\xi, \eta) = 0$ fuera de \mathcal{A} . Por tanto, la amplitud compleja en P resulta ser la transformada de Fourier de la función $E(\xi, \eta)$ que se denomina *función de abertura* o *función de pupila*. Salvo un factor constante, que carece de interés en la distribución relativa, esta función coincide con la función de transmisión τ de la abertura, es decir que E_P es la *transformada espacial de Fourier de la abertura*. Las frecuencias (p, q) del espacio de Fourier se corresponden con las direcciones que toman las ondas difractadas con respecto a la incidente. En efecto, la integral anterior se puede escribir,

$$E(p, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi, \eta) e^{i2\pi(p\xi + q\eta)} d\xi d\eta, \quad (3-38)$$

donde,

$$p = \frac{\alpha - \alpha'}{\lambda}, \quad q = \frac{\beta - \beta'}{\lambda}, \quad (3-39)$$

vienen determinadas por los cosenos directores de las ondas incidente y difractada, de modo que cada dirección de difracción (p, q) va asociada con una frecuencia espacial y su amplitud correspondiente $E(p, q)$. La lente L_2 representa cada dirección (frecuencia) en un punto del plano focal por lo que L_2 actúa como un computador óptico analógico. En el capítulo 6 veremos que esta manera de considerar la difracción es de gran interés en el tratamiento de las imágenes.

Cuando la fuente S y/o el punto de observación P no están en el infinito, hay que incluir también los términos de segundo orden en (3-35), y en este caso se habla de *difracción de Fresnel*. Aunque experimentalmente es más fácil de producir, el manejo matemático es considerablemente más complejo. Debido a su mayor interés práctico, de aquí en adelante siempre nos situaremos en geometría de Fraunhofer.

3.9 Apéndices

3.9.1 Demostración del teorema de la integral de Kirchhoff

3.9.2 Integración sobre una zona de Fresnel

Capítulo 4

Difracción de Fraunhofer por una abertura

4.1 Configuración geométrica

En el capítulo anterior, sección 3.8, se ha introducido la llamada *difracción de Fraunhofer* (véase la Fig. 4-1) como una geometría de especial interés práctico. En esta geometría tanto la fuente de luz como la pantalla de observación están infinitamente alejadas de la abertura difractante, aunque una distancia suficientemente grande es una buena aproximación. Por estar la fuente en el infinito, la onda incidente sobre la abertura es plana y su dirección de propagación viene determinada por su vector de onda \vec{k}_i , o bien, en función de sus cosenos directores, por $\vec{u}_{k_i} \equiv [\alpha, \beta, \gamma]$. Como consecuencia de la difracción en la abertura, la onda se hace divergente en mayor o menor medida (deja de

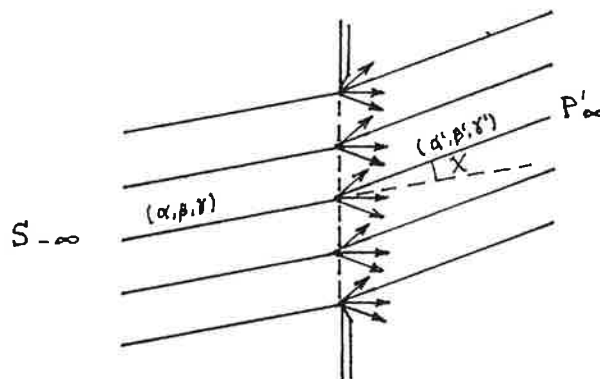


Figura 4-1 Geometría correspondiente a la difracción de Fraunhofer; tanto la fuente como la pantalla se encuentran en el infinito.

ser plana) y produce una cierta mancha de luz en la pantalla alejada. De acuerdo con el principio de Huygens-Fresnel, la luz que llega a un punto concreto de la pantalla, como el P'_∞ de la figura 4-1, es la superposición de la luz procedente de todos los emisores secundarios de Huygens. Pero por encontrarse en el infinito, todos los rayos que llegan a él son paralelos entre sí (a cada punto del plano le corresponde una dirección de la luz difractada) y definen una onda plana de dirección $\vec{u}_k \equiv [\alpha', \beta', \gamma']$. Es decir que la abertura genera a su salida una multiplicidad de ondas planas a partir de la onda plana incidente. Como los emisores secundarios mantienen relaciones de fase constantes, la amplitud compleja en un punto arbitrario P' vendrá dada por la superposición coherente que determina la integral (3-36):

$$E_{P'} = C \int_{\mathcal{A}} e^{ik[(\alpha-\alpha')\xi+(\beta-\beta')\eta]} d\xi d\eta. \quad (4-1)$$

Por ejemplo, si todos los rayos paralelos que determinan la intensidad en un punto están en fase, la integral anterior dará un máximo de intensidad.

Como se mencionó en la sección 3.8, una forma más práctica de trabajar en geometría de Fraunhofer consiste en usar dos lentes convergentes como muestra la figura 3-9. La fuente puntual de luz S se sitúa en el plano focal objeto de la lente colimadora L_1 , lo que equivale a alejar S hasta el infinito obteniéndose un haz de luz colimado o frente de onda plano. Por otra parte, la pantalla se coloca en el plano focal imagen de la lente colectora L_2 , cada uno de cuyos puntos recoge la luz difractada en una cierta dirección. A su vez esta dirección está asociada al punto del plano del infinito correspondiente al punto del plano focal.

4.2 Difracción por una abertura rectangular

Consideremos el caso de una abertura rectangular de longitud $2a$ según el eje ξ y $2b$ según el eje η ; estando situada la fuente de luz S en el plano focal objeto de la lente colimadora C_1 y la pantalla en el plano focal imagen de la lente colectora C_2 como se muestra en la figura 4-2. Por tanto, la luz procedente de la fuente S incide sobre la abertura como una onda plana de dirección $\overline{SH_1} \equiv [\alpha, \beta, \gamma]$, la del rayo principal de

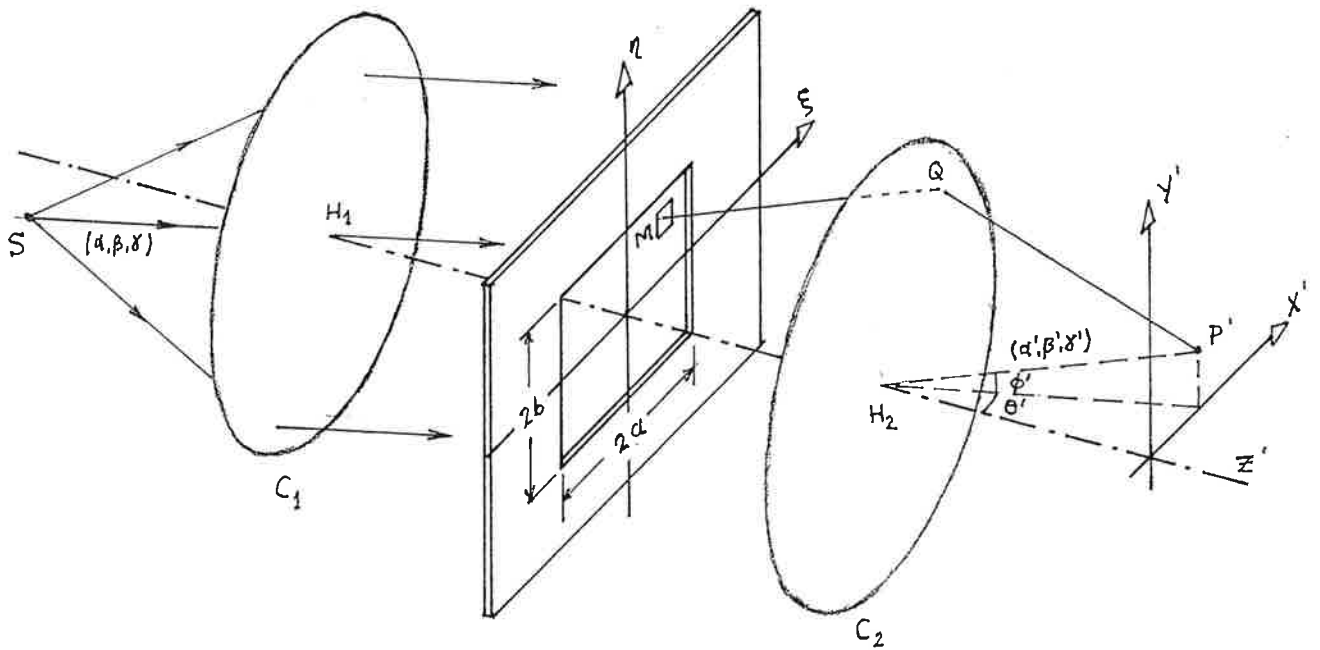


Figura 4-2 Difracción de Fraunhofer por una abertura rectangular. El tamaño de la abertura se ha exagerado para que los parámetros rotulados en el dibujo sean bien visibles.

C_1 . Para calcular la amplitud compleja del campo en el punto genérico P' asociado a la dirección $\overline{H_2P'} \equiv [\alpha', \beta', \gamma']$, debemos integrar todos los rayos que como el \overline{MQ} son paralelos a dicha dirección, es decir, usando la (4-1)

$$\begin{aligned}
 E_{P'} &= C \int_{-a}^{+a} e^{ik(\alpha-\alpha')\xi} d\xi \int_{-b}^{+b} e^{ik(\beta-\beta')\eta} d\eta \\
 &= ab C \frac{e^{ik(\alpha-\alpha')a} - e^{-ik(\alpha-\alpha')a}}{ik(\alpha-\alpha')a} \frac{e^{ik(\beta-\beta')b} - e^{-ik(\beta-\beta')b}}{ik(\beta-\beta')b},
 \end{aligned} \tag{4-2}$$

donde se ha separado el factor ab por conveniencia. De modo que la intensidad luminosa en P' sigue la función:

$$I_{P'} \propto E_{P'} E_{P'}^* = 16 a^2 b^2 \left[\frac{\text{sen}[k(\alpha-\alpha')a]}{k(\alpha-\alpha')a} \right]^2 \left[\frac{\text{sen}[k(\beta-\beta')b]}{k(\beta-\beta')b} \right]^2. \tag{4-3}$$

En el caso muy frecuente en que la fuente S se sitúa en el foco objeto del colimador C_1 , se tiene $[\alpha, \beta, \gamma] = [0, 0, 1]$ y la intensidad toma la forma más sencilla

$$I_{P'} = cte \left[\frac{\text{sen}(k\alpha'a)}{k\alpha'a} \right]^2 \left[\frac{\text{sen}(k\beta'b)}{k\beta'b} \right]^2. \tag{4-4}$$

En el parámetro cte se han incluido todos los factores constantes que carecen de interés en el análisis de la distribución de la luz que aquí nos interesa. Nótese que la dependencia

funcional de la intensidad es la de dos factores del tipo $(\text{senc } \psi)^2 = (\text{sen}^2 \psi) / \psi^2$. Para comprender la forma de esa distribución de la intensidad vamos a estudiar cada uno de esos factores por separado.

4.2.1 Distribución de intensidad sobre el eje X'

Consideremos la distribución de intensidad a lo largo del eje X' . Para situar con más comodidad la coordenada x' del punto P' se introduce el ángulo θ' (véase la Fig. 4-2) que forma la proyección de $\overline{H_2P'}$ sobre el plano $Z'X'$ con el eje Z' , de modo que se tiene $\alpha' = \text{sen } \theta'$. Entonces, el factor correspondiente al eje X' en (4-4) se escribe:

$$(I_{P'})_{x'} = \text{cte} \left[\frac{\text{sen}(k a \text{sen } \theta')}{k a \text{sen } \theta'} \right]^2 \quad (4-5)$$

Por tanto, es una función del tipo $(\text{senc } \psi)^2 = (\text{sen}^2 \psi) / \psi^2$, donde $\psi = k a \text{sen } \theta'$, que tiene mínimos nulos cuando se anula el numerador (véase la Fig. 4-3a), es decir,

$$\text{mínimos: } k a \text{sen } \theta' = m \pi \rightarrow \frac{x'}{f'} \simeq \theta' \simeq \text{sen } \theta' = m \frac{\lambda}{2a} \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (4-6)$$

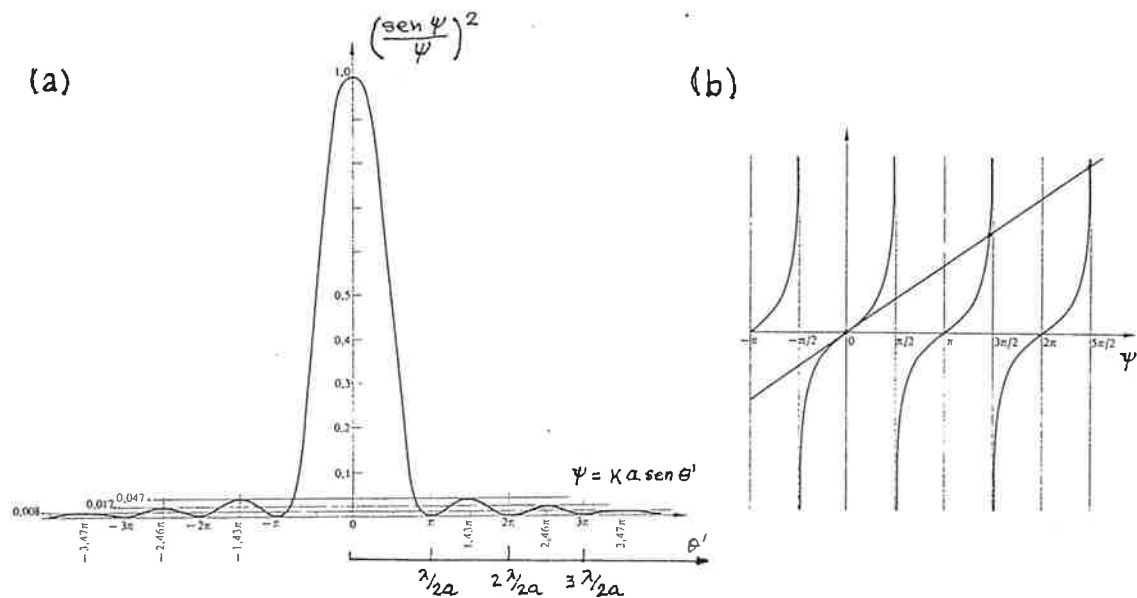


Figura 4-3 (a) Distribución de intensidad en la pantalla de la figura 4-2 a lo largo del eje X' , dada por la función $(\text{senc } \psi)^2$ ($\psi = k a \text{sen } \theta'$). (b) Representación gráfica de las soluciones de la ecuación $\tan \psi = \psi$.

El valor $m = 0$ para $\theta' = 0$ anula simultáneamente el numerador y el denominador; el límite del cociente es igual a la unidad y da lugar al máximo principal “de orden cero”. Los máximos secundarios ocurren cuando:

$$\frac{dI_{P'}}{d\psi} = 0 \rightarrow \tan \psi = \psi. \quad (4-7)$$

La última igualdad es una ecuación trascendente, cuya solución numérica da las posiciones y los valores para los máximos que se indican en la tabla 4-1; la figura 4-3b ilustra gráficamente las soluciones de esta ecuación. La anchura de los máximos viene determinada por la separación entre dos mínimos consecutivos que, de acuerdo con (4-6), es $\Delta\theta' \simeq \lambda/(2a)$. La excepción es el máximo central que tiene una anchura doble que los restantes debido a que su posición corresponde a la de un mínimo “frustado”. Nótese que tanto la condición de mínimo (4-6) como la de máximo (4-7) dependen de la longitud de onda de la luz y permiten eventualmente utilizar la difracción por una abertura como sistema espectroscópico. Sin embargo, este procedimiento sólo tiene utilidad práctica cuando se usan muchas aberturas como se analiza en el capítulo 5 dedicado a las redes de difracción.

Tabla 4-1 Posiciones y valores de los máximos y mínimos de la función $(\text{senc } \psi)^2$.

ψ_{\max}	ψ_{\min}	$(\text{senc } \psi)^2$
0		1,000
	π	0
1,430 π		0,047
	2π	0
2,459 π		0,017
	3π	0
3,471 π		0,008
	4π	0
4,477 π		0,005
	5π	0
5,482 π		0,003

4.2.2 Distribución de intensidad sobre el eje Y' y el plano $X'Y'$

Consideremos ahora la distribución de intensidad a lo largo del eje Y' . Introduciendo por comodidad el ángulo ϕ' que forma $\overline{H_2P'}$ con su proyección sobre el plano $Z'X'$, tendremos $\beta' = \text{sen } \phi'$ (Fig. 4-2), y mediante un razonamiento análogo al realizado más arriba sobre el eje X' , se obtiene la siguiente condición para los mínimos nulos:

$$\text{mínimos: } kb \text{ sen } \phi' = m\pi \rightarrow \frac{y'}{f'} \simeq \phi' \simeq \text{sen } \phi' = m \frac{\lambda}{2b} \quad (m = 1, 2, \dots); \quad (4-8)$$

y la misma condición (4-7) para los máximos siendo ahora $\psi = kb \text{ sen } \phi'$. La distribución de luz completa en el plano $X'Y'$ viene dada por el producto de los dos factores de la ecuación (4-4); la figura 4-4 ilustra la imagen que se observa en la pantalla en el caso de una abertura cuadrada ($b = a$). Tanto la extensión del máximo central como la de los secundarios es menor cuanto mayor es la abertura. En el límite en que la abertura sea “infinita” (equivalente a $\lambda \rightarrow 0$), una vez más se obtiene el resultado de la óptica geométrica que predice una imagen puntual de una fuente puntual como la S.

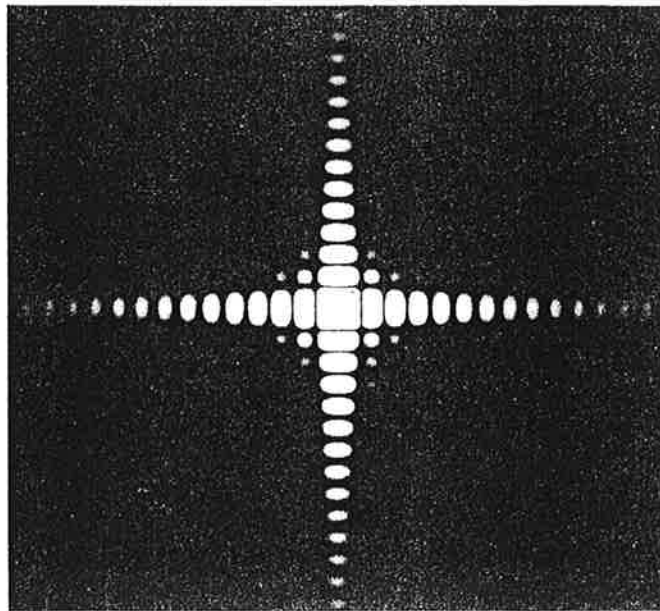


Figura 4-4 Distribución de intensidad producida en la pantalla de la figura 4-2 por una abertura cuadrada ($b = a$).

4.2.3 Difracción por una rendija

Si en vez de una abertura en la que $b \sim a$, se usa una rendija en la que $b \gg a$, de acuerdo con lo visto anteriormente, la distribución de luz a lo largo de la dirección Y' tendrá una extensión prácticamente nula, mientras que la correspondiente a la dirección X' tendrá la forma de la figura 4-3a. Es decir, se tendrá como imagen de S una línea de trazos paralela al eje X' (cada trazo corresponde a uno de los máximos). En este caso, en vez de una fuente puntual conviene utilizar una fuente-rendija, como en el experimento de Young, cuya dimensión grande sea también a lo largo del eje Y' . En estas condiciones la imagen de cada punto de la fuente-rendija es una línea de trazos más o menos desplazada en la pantalla (véase la Fig. 4-5). Por ser incoherentes los diferentes puntos emisores de la fuente, se deben sumar las intensidades de todas las imágenes, y como los máximos y mínimos de todas ellas son coincidentes a lo largo del eje X' , en la pantalla se obtiene una serie de franjas de difracción paralelas a la dirección larga de las dos rendijas (la rendija-fuente y la difractante). De esta forma el análisis de la difracción queda reducido a una dimensión, la X' , y se aprecian más fácilmente las franjas de difracción.

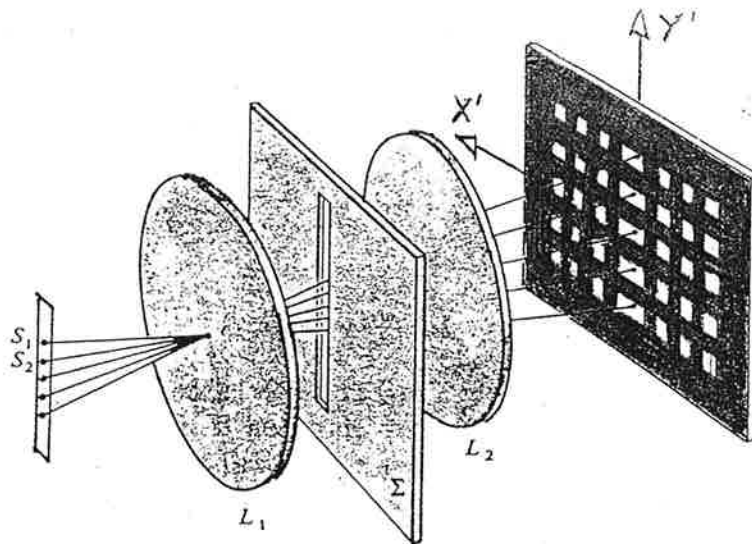


Figura 4-5 Distribución de intensidad producida por la difracción en una rendija alargada según el eje η para varias fuentes puntuales desplazadas en la misma dirección.

4.3 Difracción por una abertura circular

Consideremos ahora la difracción por una abertura circular de centro O y radio R . Este caso es particularmente importante en los instrumentos ópticos porque los diafragmas, las monturas de las lentes y de los espejos, etc. son en su mayoría circulares. Consideremos por sencillez que la fuente puntual está situada en el eje perpendicular a la abertura y que pasa por su centro, de modo que $\alpha = \beta = 0$ y la dirección de la onda incidente es $[0, 0, 1]$ como se muestra en la figura 4-6. Usando de nuevo la expresión (4-1), la amplitud compleja en la pantalla (plano focal de la lente C_2) ahora viene dada por:

$$E_{P'} = C \int_A e^{-ik(\alpha'\xi + \beta'\eta)} d\xi d\eta. \quad (4-9)$$

Dada la simetría de revolución alrededor del eje, conviene hacer los cálculos en coordenadas polares en las que se tiene:

$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \varphi, \quad d\xi d\eta = \rho d\rho d\varphi, \quad (4-10)$$

siendo ρ la coordenada radial y φ la coordenada angular de un punto de la abertura circular (véase la Fig. 4-6). Designaremos mediante $[\rho', \varphi']$ las correspondientes coorde-

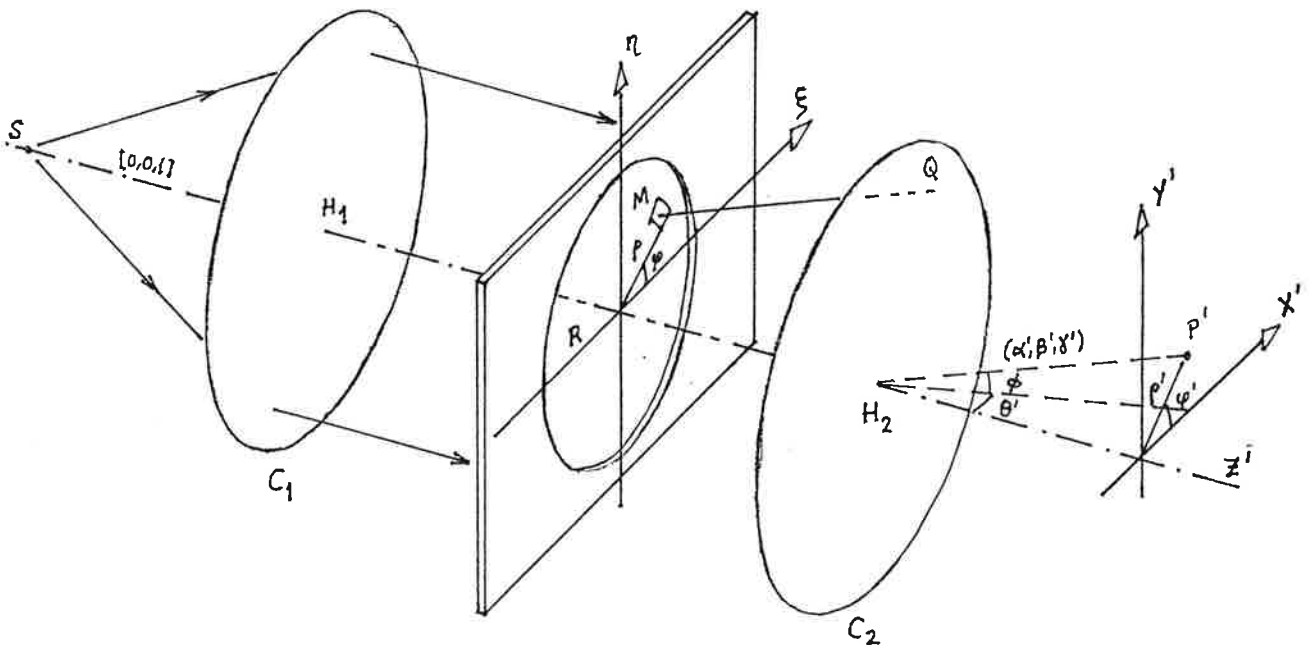


Figura 4-6 Difracción de Fraunhofer por una abertura circular.

nadas polares sobre la pantalla, y dada la simetría de revolución bastará tomar un valor para el azimut φ' que elegiremos por sencillez sobre el eje X' ($\varphi' = 0$). Para este rayo, los cosenos directores serán $\alpha' \equiv \sin \theta'$ y $\beta' \equiv \sin \phi = 0$. Sustituyendo ahora en (4-9) se llega a la expresión siguiente:

$$E_{P'} = C \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-i(k\rho\rho'/f') \cos \varphi} \rho d\rho d\varphi \quad (4-11)$$

que da como resultado (véase el apéndice 4.5.1):

$$E_{P'} = \pi R^2 C \frac{2 J_1(Z)}{Z}, \quad \text{con} \quad Z = \frac{k R \rho'}{f'}, \quad (4-12)$$

siendo $J_1(Z)$ la función de Bessel de primer orden de primera especie que se ha representado con línea de puntos en la figura 4-7. Por tanto, la distribución de intensidad, una vez normalizada a la unidad para $Z = 0$ puesto que sólo interesan los valores relativos, viene dada por:

$$I_{P'} = \left[\frac{2 J_1(Z)}{Z} \right]^2. \quad (4-13)$$

Esta función, que recibe el nombre de *función de Airy*, se ha representado con línea continua en la figura 4-7 y presenta un comportamiento que recuerda al de la función

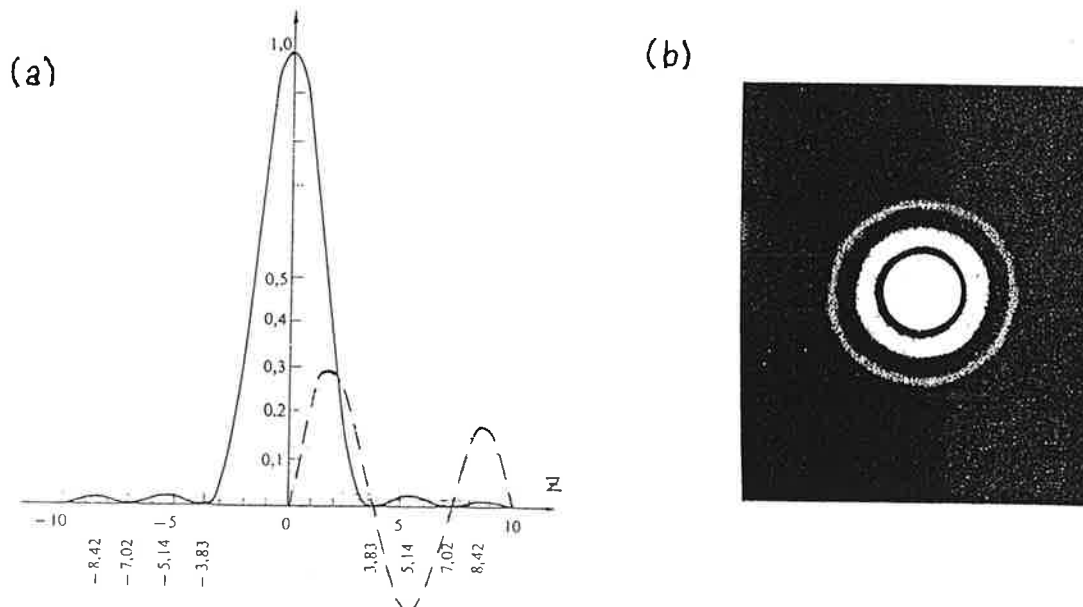


Figura 4-7 (a) Con línea de puntos se ha representado la función de Bessel $J_1(Z)$, y con línea continua la distribución de intensidad $[2J_1(Z)/Z]^2$ que produce la difracción por una abertura circular. (b) Fotografía de la imagen observada en la pantalla.

(4-5). Esto se debe a que la función $J_1(Z)$ también presenta oscilaciones como la función seno y se hace cero para determinados valores del argumento, aunque su amplitud es amortiguada en vez de constante. La intensidad también es máxima para $Z=0$ porque $\lim_{Z \rightarrow 0} [2 J_1(Z)/Z] = 1$. En la tabla 4-2 se dan las posiciones y valores de los primeros máximos y mínimos de la función de Airy.

Tabla 4-2 Posiciones y valores de los máximos y mínimos de la función de Airy.

Z_{\max}	Z_{\min}	$[2 J_1(Z)/Z]^2$
0		1,000
	3,83	0
5,14		0,017
	7,02	0
8,46		0,004
	10,17	0
11,62		0,0016
	13,32	0

La distribución de luz por tanto, consiste en un disco central brillante, rodeado de anillos concéntricos con él, alternativamente claros y oscuros. Hay que notar que la intensidad de los anillos brillantes decrece rápidamente al alejarnos del disco central y en cualquier caso es mucho menor que la de éste; la del primer anillo sólo es un 1,7% de la del disco central. La energía contenida entre dos radios, ρ'_1 y ρ'_2 , se puede calcular mediante la integral,

$$\mathcal{E} = \int_{\rho'_1}^{\rho'_2} I da = \int_{\rho'_1}^{\rho'_2} \left[\frac{2 J_1(Z)}{Z} \right]^2 2\pi \rho' d\rho' \quad (4-14)$$

y el resultado da un 84% de la energía para el disco central, un 7% para el primer anillo, un 2,8% para el segundo anillo y un 6% para el conjunto de todos los anillos restantes. El disco central viene determinado por el radio del primer mínimo es decir $Z_1=3,83$ de acuerdo con la tabla 4-2. Por tanto, usando la expresión de Z dada en (4-12), se tiene:

$$3,83 = \frac{k R \rho'}{f'} \quad \rightarrow \quad \frac{\rho'}{f'} \simeq \theta' \simeq 1,22 \frac{\lambda}{D}, \quad (4-15)$$

siendo $D = 2R$ el diámetro de la abertura circular. En la sección siguiente veremos la importancia que tienen estos resultados en relación con el poder de resolución de los instrumentos ópticos. De hecho, la expresión (4-15) se ha introducido previamente, sin justificar, en el estudio geométrico de los instrumentos ópticos (capítulo 4 de óptica geométrica).

4.4 Poder de resolución de los instrumentos ópticos

4.4.1 Instrumentos ópticos y difracción de Fraunhofer

El montaje experimental de dos lentes usado para observar difracción de Fraunhofer (Fig. 4-8a) constituye un sistema óptico que representa el objeto puntual S (la fuente) en la imagen paraxial P en la pantalla. La imagen no es un punto sino una mancha de Airy debido a la difracción en la abertura que actúa como diafragma de abertura del sistema. En este sistema óptico, por tanto, los efectos que produce la difracción en la abertura sobre la imagen se pueden tratar mediante la aproximación de Fraunhofer.

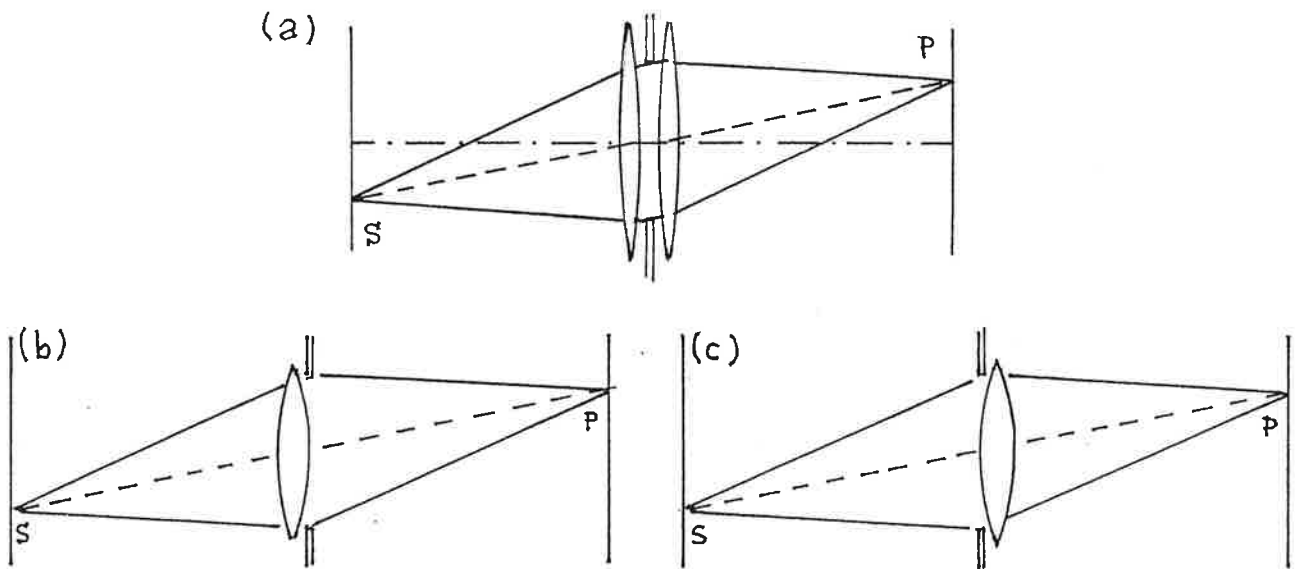


Figura 4-8 (a) El montaje usual para observar difracción de Fraunhofer es un sistema óptico que representa el objeto S como una mancha de Airy centrada en la imagen paraxial P; la abertura difractante actúa como diafragma de abertura. (b) y (c) Si las dos lentes de (a) se sustituyen por una única lente de la misma potencia, en P se obtiene la misma mancha de Airy.

Un análisis más detallado[†] demuestra que éste es el caso para cualquier instrumento óptico. Por ejemplo, si en la figura 4-8a se sustituyen las dos lentes por una única lente que forme la imagen paraxial de S en el punto P, se obtiene del citado análisis que de nuevo la imagen es la misma mancha de Airy de la abertura, tanto si la lente está delante de ella (Fig. 4-8b) como si está detrás (Fig. 4-8c). En estas figuras se ha supuesto que ambas lentes están muy próximas a la abertura. En el caso de un sistema óptico general, en el que el diafragma de abertura ocupa una posición arbitraria, se comprueba que el efecto de la difracción sobre la imagen equivale a considerar difracción de Fraunhofer en la *pupila de salida* del sistema (imagen del diafragma de abertura). Por tanto, a partir de aquí los problemas de difracción en los instrumentos ópticos se tratarán como difracción de Fraunhofer en dicha pupila de salida.

4.4.2 Difracción de Fraunhofer y poder de resolución

El hecho de que, incluso con un sistema óptico completamente corregido de aberraciones, la imagen de un punto no sea un punto sino una mancha de Airy implica que la imagen de un objeto extenso pierde nitidez y, en una situación límite, puede llegar a ser irreconocible. Este efecto se puede ilustrar de forma más clara considerando el caso simple de la imagen de dos puntos O_1 y O_2 que se encuentran muy próximos. Este ejemplo nos va a permitir, además, introducir el concepto de poder de resolución de un instrumento que forma imágenes.

Cada uno de los puntos O_1 y O_2 se va a representar en el plano imagen como una mancha de Airy centrada en la imagen geométrica O'_1 y O'_2 , respectivamente. Aunque las imágenes no sean puntuales, si están suficientemente separadas se puede decir sin ambigüedad que corresponden a dos objetos diferentes (Fig. 4-9a). Pero cuando la distancia entre ellas es menor que el radio del disco central, en la suma de sus intensidades, no se puede distinguir si la mancha resultante corresponde a un solo punto objeto o a dos (Fig. 4-9b). También aquí se usa el criterio de Lord Rayleigh[‡] que considera las imágenes

[†]Véase por ejemplo: M.V. Klein, *Optics*. J. Wiley & Sons, Nueva York, 1970, capítulo 9.

[‡]Este criterio se comentó al hablar del poder de resolución espectral del Fabry-Perot, sección 2.5.3.

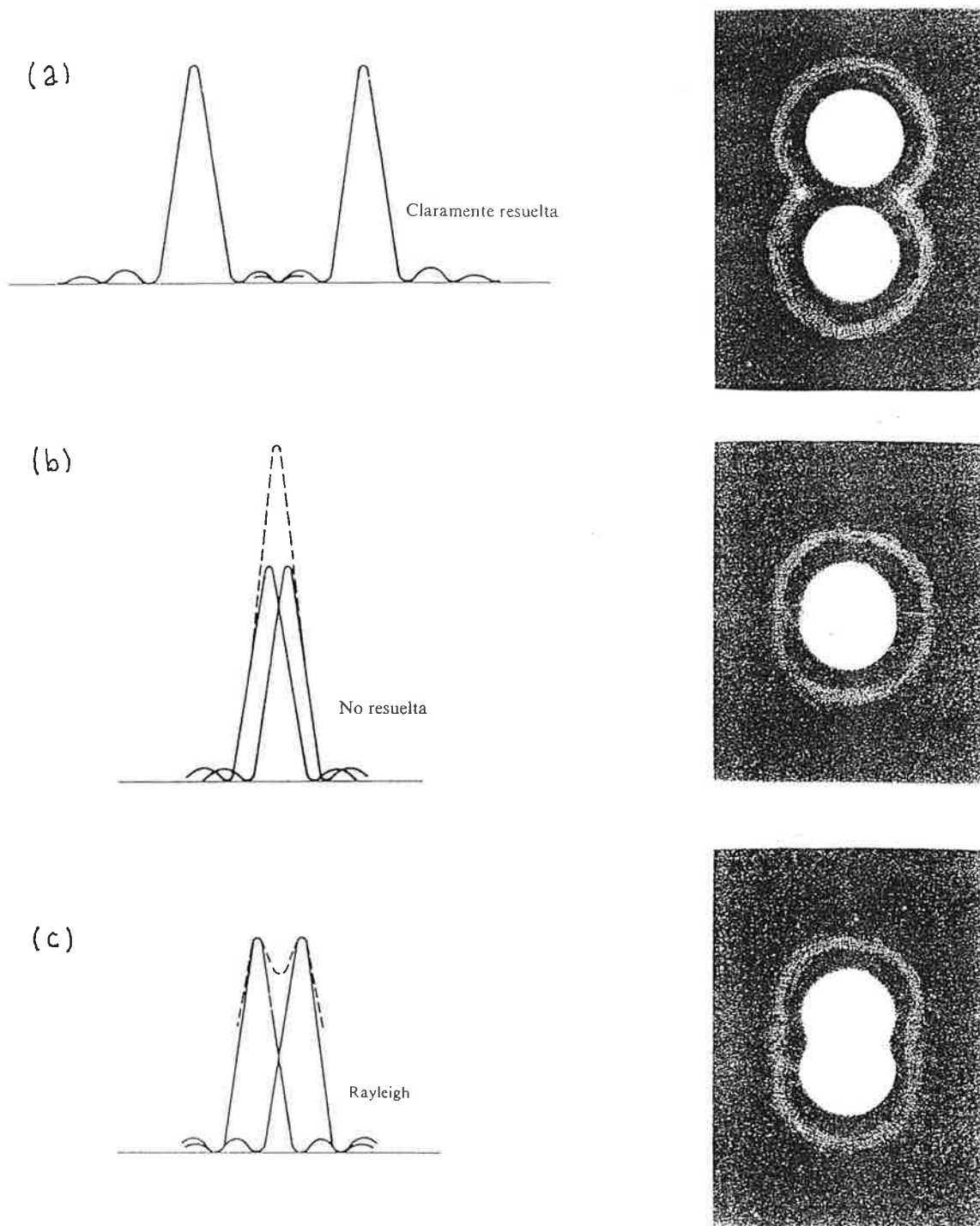


Figura 4-9 Manchas de Airy de dos puntos objeto. Cuando están alejados, las imágenes indican claramente que proceden de dos objetos diferentes (a). Si están demasiado juntos, aparentan proceder de un único punto objeto (b). En (c) los puntos se consideran justamente resueltos.

justamente resueltas cuando la distancia entre los centros de las manchas de Airy es igual al radio del disco central, es decir el radio del primer anillo oscuro (Fig. 4-9c). Esto ocurre cuando la separación angular de los dos centros está dada por (4-15):

$$\theta' = 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (4-16)$$

Con instrumentos y métodos adecuados se pueden distinguir como diferentes dos puntos con una separación angular menor que la anterior; pero este convenio resulta muy útil para caracterizar los instrumentos ópticos que forman imágenes. A partir de aquí, el poder de resolución del sistema se puede definir como el inverso de esta separación angular o como el inverso de la distancia entre O_1 y O_2 cuando sus imágenes están justamente resueltas de acuerdo con el criterio anterior.

4.4.3 Ejemplos

Un buen ejemplo es el *telescopio* espacial Hubble, en el supuesto de que está bien corregido de aberraciones, y cuyo poder de resolución no está perturbado por la atmósfera. Por esa razón se dice que el instrumento opera en el *límite de difracción*. Como el diámetro de su espejo principal es $D = 2,5$ m, de acuerdo con (4-16) y para $\bar{\lambda} = 500$ nm se tiene $\theta' = 2,44 \times 10^{-7}$ rad (aproximadamente 0,05 segundos de arco). Si se observa un objeto estelar a una distancia $b = 1.000$ años-luz ($\sim 9,5 \times 10^{15}$ Km), se podrán distinguir detalles que disten entre sí al menos $y \sim \theta' b \sim 2,3 \times 10^9$ Km, (unas 2,3 horas-luz) que es algo menos de la distancia entre el Sol y Urano. Gracias a este elevado poder de resolución y a la gran cantidad de luz que recoge, con el Hubble se han podido identificar varios planetas gigantes orbitando alrededor de sus estrellas.

Otro ejemplo interesante es el *ojo humano*, para el que el diámetro de la pupila se encuentra entre 1,5 mm y 6 mm, que para $\bar{\lambda} = 500$ nm implica θ' entre $4,1 \times 10^{-4}$ rad y 1×10^{-4} rad (entre 1'24" y 21"). Por tanto, si se observa un objeto situado a la distancia de visión próxima (25 cm), la difracción limita la agudeza visual a detalles de tamaño mínimo entre 0,1 mm y 0,025 mm (para diámetros de la pupila de 1,5 mm y 6 mm, respectivamente).

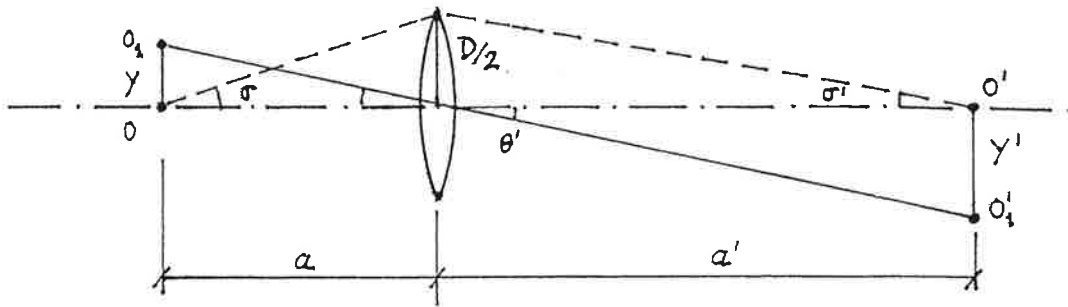


Figura 4-10 Determinación del poder de resolución de un objetivo de microscopio operando con iluminación incoherente.

Un ejemplo más complejo es el del *microscopio* que, como se discute en el capítulo 6, requiere un análisis más sutil para tener en cuenta el tipo de iluminación que se utiliza. Sin embargo, en la aproximación de iluminación incoherente, descrita en la sección 6.2.1, el poder de resolución se puede obtener de manera análoga a la empleada para el telescopio y para el ojo. Consideraremos sólo el objetivo porque es de menor diámetro que el ocular y por tanto es el que limita el poder de resolución. Sean dos emisores incoherentes muy cercanos O y O_1 en el plano objeto (Fig. 4-10), y las imágenes paraxiales O' y O'_1 dadas por el objetivo. Teniendo en cuenta que el ángulo θ' es muy pequeño ($y', D \ll a'$) y aplicando la (4-16), se obtiene la siguiente expresión para la separación mínima y' entre las imágenes:

$$y' = a' \theta' = 1,22 \frac{\lambda}{D/a'} = 1,22 \frac{\lambda_0/n'}{2 \operatorname{sen} \sigma'} = 0,61 \frac{\lambda_0}{n' \operatorname{sen} \sigma'}. \quad (4-17)$$

Por otra parte, si el objetivo está bien corregido de aberraciones debe cumplir la condición del seno de Abbe (véase el capítulo 1 de la *Optica Geométrica*):

$$n y \operatorname{sen} \sigma = n' y' \operatorname{sen} \sigma'; \quad (4-18)$$

sustituyendo esta última en la (4-17), se obtiene la separación mínima entre dos objetos puntuales que puede resolver el microscopio con iluminación incoherente:

$$y_{\min} = 0,61 \frac{\lambda_0}{n \operatorname{sen} \sigma}. \quad (4-19)$$

La magnitud $A.N. = n \sin \sigma$ se llama *abertura numérica* del objetivo y, junto con la λ_0 de la luz usada, es la que determina el poder de resolución del microscopio. Normalmente el objeto se encuentra en el aire ($n=1$) y $\sigma \leq 90^\circ$, de modo que como máximo $n \sin \sigma \simeq 1$. Para $\lambda_0 = 500 \text{ nm}$ se tiene $y_{\min} \simeq 300 \text{ nm}$. Si se usa un objetivo de inmersión en aceite ($n \simeq 1,5$) se llega hasta $y_{\min} \simeq 200 \text{ nm}$. Compárese este valor con el tamaño mínimo de $\sim 25 \mu\text{m}$ que puede resolver el ojo desnudo.

Para aumentar el poder de resolución en el caso del microscopio, además de aumentar la apertura numérica, se puede usar una fuente de luz de menor λ_0 . Se han hecho intentos con luz ultravioleta y hasta con rayos X. Pero la dificultad de manejo (enfoco, visualización, etc.) de estas radiaciones ha impedido llegar a resultados útiles. Un intento de mayor éxito fue el paso a las ondas de De Broglie asociadas a los electrones, en el llamado *microscopio electrónico*. Para un potencial acelerador de $\sim 50 \text{ KV}$ se tiene $\lambda_B = h/p \sim 5 \text{ pm}$ (donde h es la constante de Planck y p es el momento lineal del electrón). El papel de las lentes ópticas de vidrio lo desempeñan las lentes eléctricas y magnéticas que aprovechan la carga eléctrica de los electrones para desviarlos y focalizarlos. Con este microscopio se pueden conseguir aumentos próximos a 10^7 frente a los 10^3 que se obtienen con el microscopio óptico. Mayores aumentos (hasta la observación de átomos individuales) se han conseguido con el *microscopio de efecto tunel*. Pero en ese microscopio la formación de la imagen es un concepto muy diferente del manejado en los microscopios óptico y electrónico (que mantienen bastantes similitudes). Su límite de resolución no viene determinado por la λ de las ondas/partículas que utiliza en el efecto tunel entre el objeto y la *punta* de rastreo.

4.5 Apéndices

4.5.1 Integral de la abertura circular

Capítulo 5

Redes de difracción

5.1 Principio de la red de difracción

En este capítulo se van a analizar los fenómenos de difracción que se producen cuando la luz pasa a través de varias aberturas situadas en una pantalla (el caso de una sola abertura se ha estudiado en capítulo anterior). Se verá que si las aberturas son iguales, si es muy grande su número y si se encuentran ordenadas de forma periódica, se presentan fenómenos característicos de la interferencia de muchos rayos (similares a los casos vistos del Fabry-Perot y las películas delgadas, secciones 2.5 y 2.6), dando lugar a las denominadas *redes de difracción* que tienen importantes aplicaciones.

Consideremos una pantalla que contiene N aberturas idénticas orientadas de forma análoga (Fig. 5-1). Para ubicar las aberturas, elegiremos un punto O_j en cada una de ellas, situado en la misma posición relativa en todas ellas, y de coordenadas $[\xi_j, \eta_j]$ respecto a un sistema de ejes general. Estos puntos O_j serán los orígenes de otros tantos sistemas de coordenadas locales (ξ', η') en cada abertura que resultan muy útiles para simplificar el cálculo de la integral de difracción. Si se utiliza esta pantalla en la geometría de Fraunhofer ilustrada en la figura 4-1 (o en la Fig. 3-9), la amplitud compleja en un punto arbitrario P de la pantalla observación se obtiene, como en el caso de una abertura, mediante la integral (4-1) extendida a todas las aberturas, es decir:

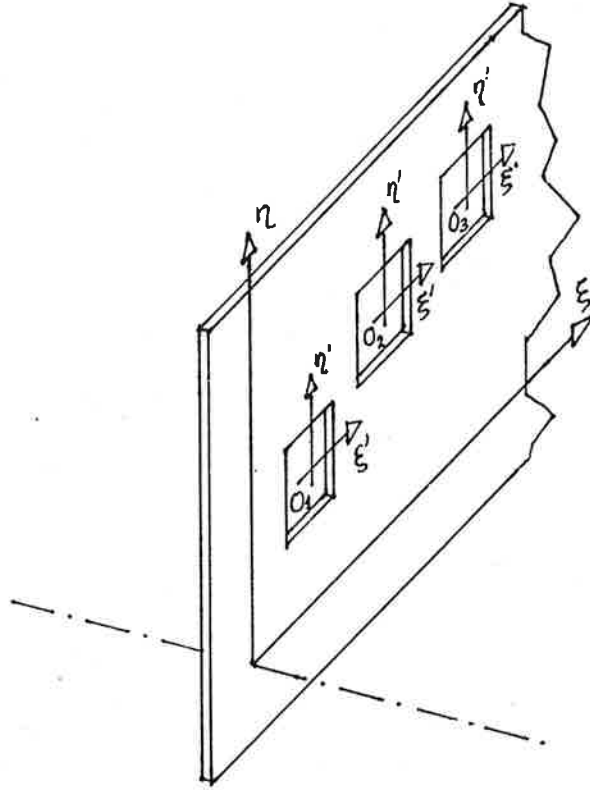


Figura 5-1 Aberturas idénticas e igualmente orientadas situadas al azar sobre una pantalla opaca. Mientras que (ξ, η) es el sistema de coordenadas general, (ξ', η') es el sistema local en cada abertura individual. El origen de cada sistema local O_j , está situado en la misma posición relativa en todas las aberturas.

$$\begin{aligned}
 E_P &= C \sum_{j=1}^N \int_{A_j} e^{ik[(\alpha-\alpha')(\xi_j+\xi')+(\beta-\beta')(\eta_j+\eta')]} d\xi' d\eta' \\
 &= \left\{ C \int_{A_j} e^{ik[(\alpha-\alpha')\xi'+(\beta-\beta')\eta']} d\xi' d\eta' \right\} \sum_{j=1}^N e^{ik[(\alpha-\alpha')\xi_j+(\beta-\beta')\eta_j]} \quad (5-1) \\
 &= E_d(P) E_{in}(P) .
 \end{aligned}$$

La integral de la primera igualdad se extiende a cada abertura pero, al ser idéntica para todas ellas, puede sacarse factor común del sumatorio. Por tanto, la expresión anterior consta de dos factores; uno indicado por E_d que representa el efecto de la difracción por una abertura individual y otro (el sumatorio) indicado por E_{in} que representa la superposición de los campos de difracción coherentes, es decir, el efecto de interferencia entre aberturas. La intensidad constará también de dos factores que se pueden escribir

como sigue,

$$\begin{aligned}
 I_P &= I_d(P) \left| \sum_{j=1}^N e^{ik[(\alpha-\alpha')\xi_j + (\beta-\beta')\eta_j]} \right|^2 \\
 &= I_d(P) \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N e^{ik[(\alpha-\alpha')(\xi_j - \xi_m) + (\beta-\beta')(\eta_j - \eta_m)]} \\
 &= I_d(P) \left\{ N + \sum_{j=1}^N \sum_{m \neq j}^N e^{ik[(\alpha-\alpha')(\xi_j - \xi_m) + (\beta-\beta')(\eta_j - \eta_m)]} \right\}.
 \end{aligned} \tag{5-2}$$

A continuación se utiliza la fórmula anterior en tres ejemplos para ilustrar el efecto del número de aberturas y su distribución.

5.1.1 Dos aberturas, reanálisis del experimento de Young

En el caso en que la pantalla sólo tenga dos aberturas, haciendo $N=2$ en la fórmula general (5-2), queda:

$$I_P = I_d(P) \left\{ 2 + e^{ik[(\alpha-\alpha')(\xi_1 - \xi_2) + (\beta-\beta')(\eta_1 - \eta_2)]} + e^{-ik[(\alpha-\alpha')(\xi_1 - \xi_2) + (\beta-\beta')(\eta_1 - \eta_2)]} \right\}; \tag{5-3}$$

haciendo en la anterior:

$$\delta = k [(\alpha - \alpha')(\xi_1 - \xi_2) + (\beta - \beta')(\eta_1 - \eta_2)], \tag{5-4}$$

se obtiene finalmente:

$$I_P = 2 I_d(P) (1 + \cos \delta). \tag{5-5}$$

Como cabía esperar, la expresión (5-5) coincide con la fórmula (1-12) que se aplica al experimento de Young (interferencia de dos rayos); pero ahora (al introducir el efecto de la difracción) queda corregida. La intensidad I_0 , que allí era constante, aparece reemplazada por la I_d que representa la distribución de intensidad correspondiente a la difracción en una abertura (fórmula (4-5) si se trata de rendijas). Como el factor $I_d = |E_d(P)|^2$ modula las franjas de interferencia, recibe habitualmente el nombre de *factor de forma*. De hecho, si las aberturas son muy grandes, la mancha de difracción I_d llega a ser tan pequeña que no se pueden observar las franjas de interferencia. Este

resultado es análogo al obtenido con la fórmula (1-47) relativa a la extensión de la fuente luminosa (en este caso se trata de la anchura de las rendijas): la visibilidad de las franjas es precisamente la difracción debida a la extensión de la fuente (teorema de Van Cittert-Zernike).

5.1.2 Muchas aberturas distribuidas al azar

En este caso los términos de (5-2) con valores de j y m diferentes fluctúan rápidamente al variar $(\alpha - \alpha')$ y $(\beta - \beta')$, y en consecuencia el valor medio de su suma se anula. Por otra parte, los términos con $m = j$ valen 1, con lo que a excepción de pequeñas fluctuaciones locales tendremos:

$$I(P) \simeq N I_d(P). \quad (5-6)$$

Es decir, prácticamente se reproduce la imagen de difracción de una abertura pero con una intensidad N veces superior (Fig. 5-2a). Sin embargo, hay que exceptuar el punto central de la imagen definido por la condición $\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = 0$; para ese punto todos los exponentes del sumatorio de (5-2) valen 1 y el sumatorio queda $N(N - 1) \simeq N^2$, haciendo que el centro sea muy brillante.

5.1.3 Muchas aberturas distribuidas regularmente

El caso de verdadero interés es el de un gran número N de aberturas que se encuentran distribuidas de forma regular. En este caso pueden existir ciertas direcciones, definidas por $(\alpha - \alpha')$ y $(\beta - \beta')$, para las cuales las fases de todos los términos (incluso con $m \neq j$) sean múltiplos enteros de 2π , y cada término vale 1. Entonces la suma de todos los términos de (5-2) vale $N(N - 1) \simeq N^2$, y si N es muy grande, se obtiene un incremento enorme de la intensidad para esas direcciones concretas (Fig. 5-2b). Este es un fenómeno similar al de la interferencia de ondas múltiples en una lámina (sección 2.4): las direcciones para las que los numerosos rayos de luz están en fase son máximos muy agudos, porque un pequeño cambio de dirección destruye el acuerdo de fase (muy crítico por ser muchos rayos) y la intensidad cae a cero. La geometría de mayor utilidad práctica es la llamada *red de difracción*, en la cual las aberturas son rendijas largas y muy estrechas

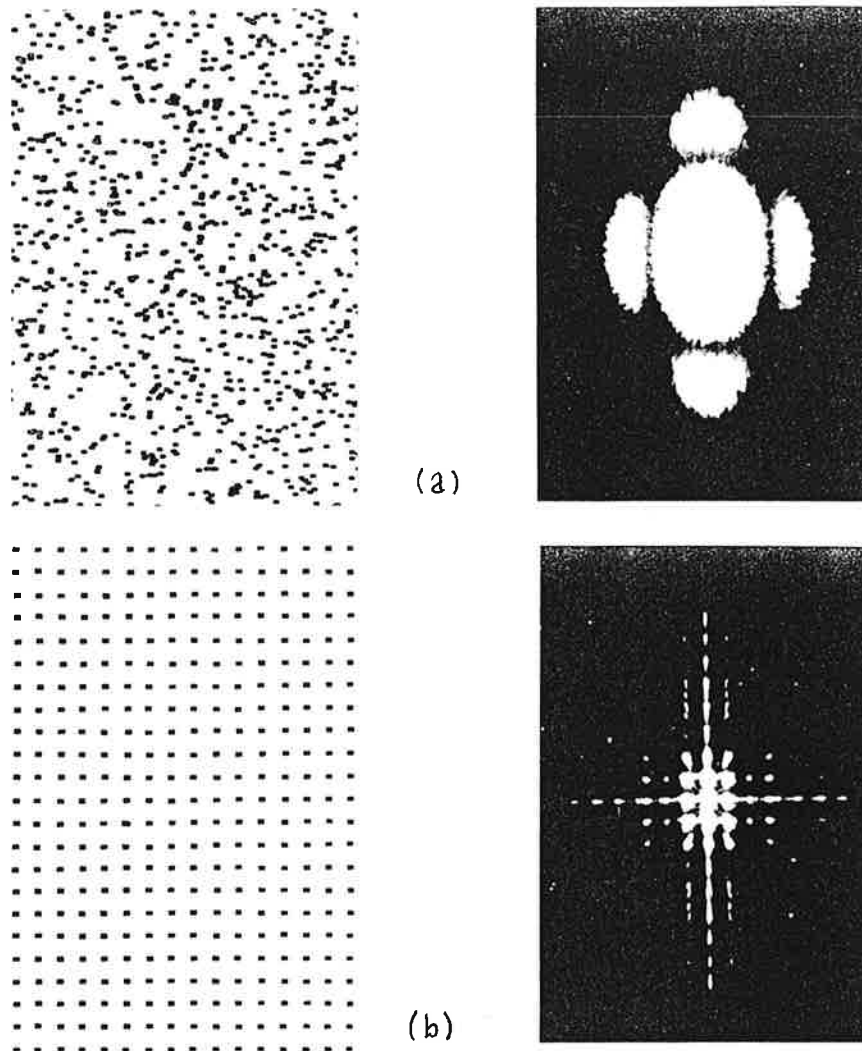


Figura 5-2 Imagen de difracción obtenida con muchas aberturas rectangulares: (a) distribuidas al azar; (b) distribuidas de forma periódica.

colocadas paralelamente a la dimensión larga de forma periódica. Este es el caso que vamos a estudiar con detalle en las secciones siguientes.

5.2 Red de difracción mono-dimensional

Consideremos la red mono-dimensional constituida por N rendijas muy alargadas en la dirección η , de anchura $2a$ a lo largo de la dirección ξ y espaciadas por un periodo de

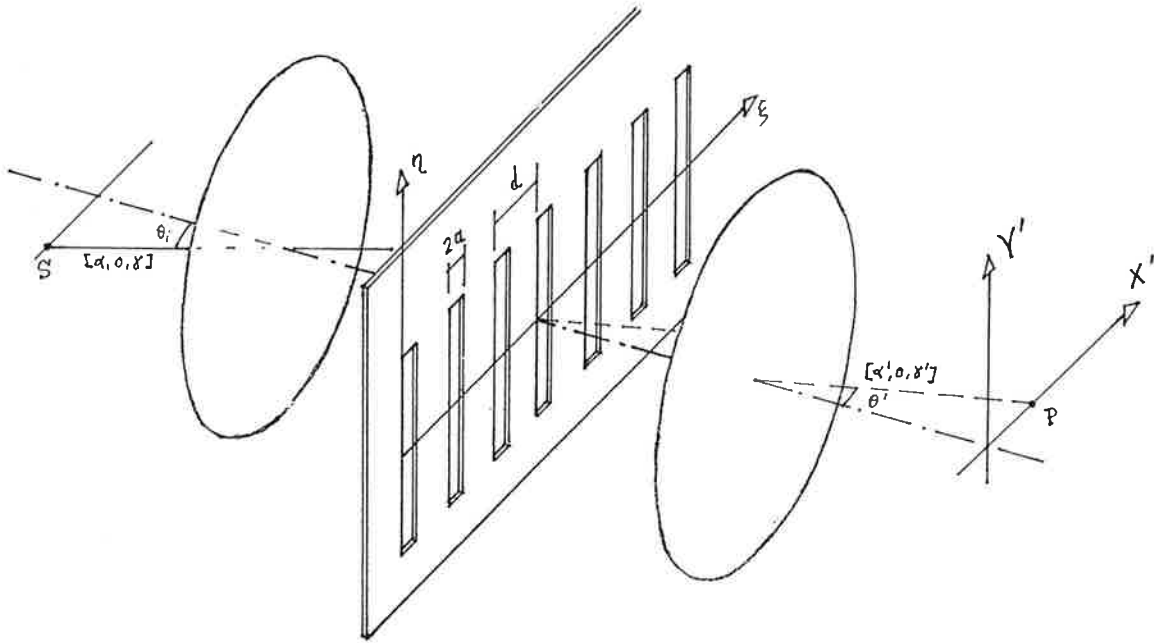


Figura 5-3 Red de difracción mono-dimensional. La anchura de las rendijas ($2a$) y el periodo de la red (d) se han exagerado para que sean visibles en la figura.

red d , representada en la figura 5-3. Tomando el origen local $O_j[\xi_j, \eta_j]$ para cada rendija en el centro de la dimensión alargada η y en el valor mínimo de ξ , podemos escribir:

$$O_j[\xi_j, \eta_j] = [jd, 0] \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N - 1). \quad (5-7)$$

Ahora consideraremos la onda plana incidente con dirección perpendicular al eje η , es decir, $[\alpha, \beta, \gamma] = [\text{sen } \theta_i, 0, \text{cos } \theta_i]$ de acuerdo con la figura 5-3. Al tratarse de rendijas alargadas según η , la figura de difracción estará colapsada en el eje Y' y la dirección de las ondas planas emergentes vendrá dada por: $[\alpha', \beta', \gamma'] = [\text{sen } \theta', 0, \text{cos } \theta']$. Entonces la amplitud de la onda difractada en el punto P determinado por la dirección $[\alpha', 0, \gamma']$ será, de acuerdo con la expresión (5-1),

$$\begin{aligned} E_P &= \left[C \int_A e^{ik(\alpha-\alpha')\xi'} d\xi' \right] \sum_{j=0}^{N-1} e^{ik(\alpha-\alpha')jd} \\ &= 2aC \frac{\text{sen}[k(\alpha-\alpha')a]}{k(\alpha-\alpha')a} \frac{1 - e^{iNkd(\alpha-\alpha')}}{1 - e^{ikd(\alpha-\alpha')}} \end{aligned} \quad (5-8)$$

donde, para la última igualdad, se ha tenido en cuenta la (4-2) y se ha efectuado la suma

de N términos de la serie geométrica de razón $e^{ikd(\alpha-\alpha')}$. Resulta instructivo hacer notar la forma que tiene la suma de la serie geométrica que representa el factor de interferencia: $1 + e^{ik(\alpha-\alpha')d} + e^{ik(\alpha-\alpha')2d} + \dots$; la amplitud resultante de este factor es la misma que la debida a una serie de fuentes secundarias coherentes, caracterizadas por una amplitud unidad y con fases que difieren unas de otras en múltiplos enteros de $kd(\alpha - \alpha')$. Si consideramos dos puntos correspondientes, A y B, en rendijas vecinas (Fig. 5-4) se ve claramente el significado de esta diferencia de fase: corresponde a la diferencia de camino entre los rayos que llegan a A y a B dada por $d \sin \theta_i$ y la de los que salen de estos puntos dada por $d \sin \theta'$, es decir,

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d (\sin \theta_i - \sin \theta'). \quad (5-9)$$

Para obtener la intensidad $I(P) \propto E(P)[E(P)]^*$ basta usar la (5-8) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} I(P) &= cte \frac{\text{sen}^2[k(\alpha - \alpha')a]}{[k(\alpha - \alpha')a]^2} \frac{1 - e^{iNkd(\alpha-\alpha')}}{1 - e^{ikd(\alpha-\alpha')}} \frac{1 - e^{-iNkd(\alpha-\alpha')}}{1 - e^{-ikd(\alpha-\alpha')}} \\ &= cte \frac{\text{sen}^2[k(\alpha - \alpha')a]}{[k(\alpha - \alpha')a]^2} \frac{\text{sen}^2 \frac{Nkd(\alpha - \alpha')}{2}}{\text{sen}^2 \frac{kd(\alpha - \alpha')}{2}} \\ &= I_d(P) I_{in}(P). \end{aligned} \quad (5-10)$$

En esta expresión $I_d(P)$ representa el factor debido a la difracción en una rendija, que ya se ha estudiado en la sección 4.2; por otra parte I_{in} representa el factor de interferencia

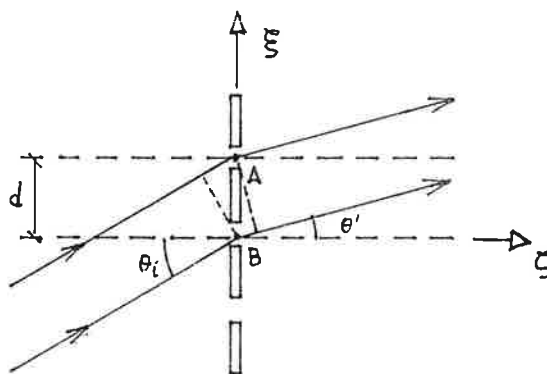


Figura 5-4 Cálculo de la diferencia de fase para dos puntos correspondientes, A y B, en rendijas vecinas.

debido a N rendijas coherentes que pasamos a analizar ahora.

La función:

$$I_{in}(P) = \frac{\text{sen}^2 \frac{N \delta}{2}}{\text{sen}^2 \frac{\delta}{2}}, \quad (5-11)$$

donde δ viene dado por (5-9), presenta máximos principales de valor N^2 cada vez que se anula el denominador, porque también se anula el numerador y se tiene:

$$\lim_{\text{sen} \frac{\delta}{2} \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \frac{N \delta}{2}}{\text{sen} \frac{\delta}{2}} = N. \quad (5-12)$$

Es decir, habrá máximos principales de valor N^2 cuando se cumpla:

$$\text{máximos: } \text{sen}^2 \frac{\delta}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \pm \frac{\delta}{2} = \pm m \pi \quad (5-13)$$

y se puede escribir:

$$(I_{in})_{\max} = N^2 \quad \rightarrow \quad d(\text{sen} \theta_i - \text{sen} \theta') = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (5-14)$$

Este resultado significa que si se cumple la condición de máximo principal la diferencia de camino óptico entre puntos correspondientes de dos rendijas vecinas es un múltiplo entero m de λ , siendo m el orden interferencial del máximo correspondiente. La expresión (5-14) suele llamarse *ecuación de la red*.

Por otra parte, la función (5-11) también presenta mínimos nulos cuando se anula el numerador sin que se anule el denominador, es decir cuando se cumple:

$$\text{mínimos: } \text{sen}^2 \frac{N \delta}{2} = 0 \quad (\text{sen}^2 \frac{\delta}{2} \neq 0) \quad \rightarrow \quad \pm \frac{N \delta}{2} = \pm j \pi \quad \left(\frac{j}{N} \neq \text{entero}\right) \quad (5-15)$$

y en este caso se puede escribir que:

$$(I_{in})_{\min} = 0 \quad \rightarrow \quad d(\text{sen} \theta_i - \text{sen} \theta') = j \frac{\lambda}{N} \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \frac{j}{N} \neq \text{entero}). \quad (5-16)$$

Cuando se tiene $j/N = \text{entero}$, se trata de un mínimo “frustrado” que da lugar a un máximo principal, de modo que la anchura de los máximos principales es igual al doble

de la separación entre mínimos:

$$\Delta_{\max}(\text{sen } \theta_i - \text{sen } \theta') = 2 \frac{\lambda}{Nd} \quad (5-17)$$

Por tanto hay $N - 1$ mínimos entre dos máximos principales consecutivos; obviamente entre dos mínimos vecinos tiene que existir un máximo. Éstos se denominan máximos secundarios (hay $N - 2$ máximos secundarios entre dos principales). Debido a que en las direcciones de los máximos secundarios no están en fase las ondas procedentes de todas las rendijas, estos máximos tienen una intensidad muy inferior a la de los principales y reciben el nombre de *satélites*. Como el denominador varía mucho más lentamente que el numerador, la posición se puede determinar aproximadamente por la condición de que el numerador sea máximo. Así, para el primer máximo secundario (el que sigue al primer mínimo) el numerador tomará el valor máximo igual a 1 si $Nkd(\text{sen } \theta_i - \text{sen } \theta')/2 = 3\pi/2$, de donde se obtiene para la intensidad el valor $4N^2/(9\pi^2)$, suponiendo que $N \gg 1$. Teniendo en cuenta que la intensidad del máximo principal es N^2 , la del secundario no llega al 5% de la del principal. Los siguientes máximos secundarios son aún más pequeños al aumentar el valor del denominador.

En la figura 5-5 se han representado de modo independiente los dos factores de la ecuación (5-10) así como el producto de ambos para el caso en que $2a \ll d$. Aquí se pueden comprobar las características discutidas en los párrafos anteriores. Si se cumple la condición citada, $2a \ll d$, se pueden observar varios máximos muy agudos antes del primer mínimo de difracción, a partir del cual la red resulta de poca utilidad. Un caso frecuente en la práctica es cuando $2a \sim \lambda$ ($2a$ muy pequeña). En este caso, el factor de forma I_d no se puede calcular con la expresión (4-3) que se dedujo suponiendo válida la aproximación de Kirchhoff (sección 3.5); se requieren métodos más refinados para determinar en detalle el efecto de la difracción. Sin embargo, cabe esperar que sigan siendo válidas las características principales indicadas por el tratamiento elemental anterior. En particular, la función correcta I_d suele ser mucho más suave que la I_{in} , con lo que siguen existiendo máximos muy agudos en las posiciones determinadas por esta última.

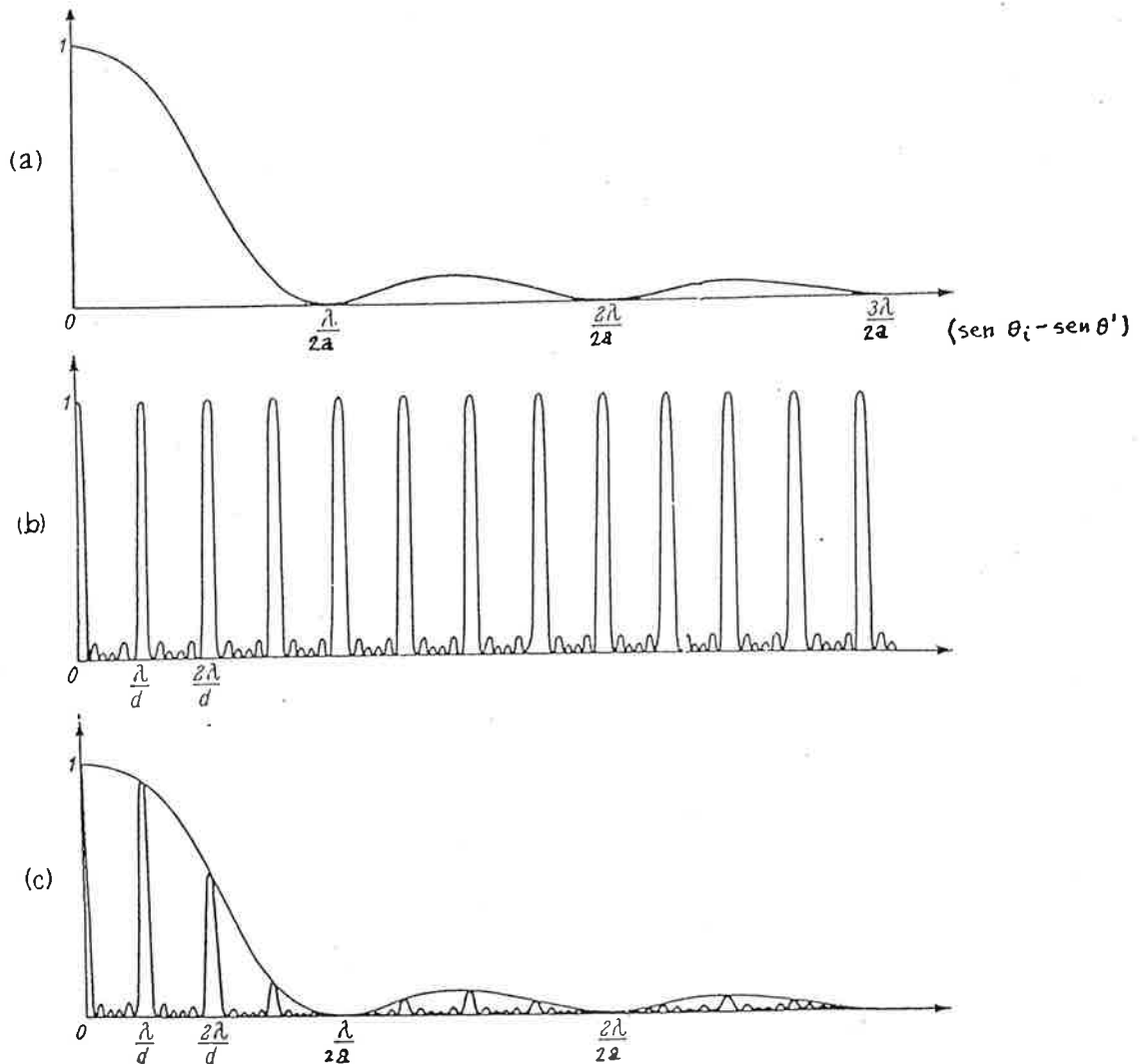


Figura 5-5 (a) Distribución de intensidad debida al factor de difracción en una red monodimensional. (b) Distribución de intensidad debida al factor de interferencia. (c) Distribución de intensidad real, producto de las dos anteriores. (Se supone que $2a \ll d$).

5.3 Propiedades de las redes de difracción

5.3.1 Poder de resolución espectral

Una propiedad muy importante de las redes de difracción es su capacidad de separar dos λ muy próximas. Esto es debido a que, como hemos visto en los párrafos anteriores, la interferencia de muchos rayos caracterizada por la función I_{in} da lugar a máximos

muy agudos cuya posición depende de la λ de acuerdo con la ecuación de la red (5-14). Según esta ecuación, los máximos principales de orden m para las longitudes de onda λ y $\lambda + \Delta\lambda$ estarán separados angularmente por:

$$\Delta\lambda(\text{sen } \theta') = |m| \frac{\Delta\lambda}{d}. \quad (5-18)$$

Si, siguiendo el criterio de Lord Rayleigh, suponemos que estos máximos están justamente resueltos cuando cada uno coincide con el primer mínimo del otro, podemos usar (5-16) y escribir:

$$[\Delta(\text{sen } \theta')]_{\min} = \frac{\lambda}{Nd}, \quad (5-19)$$

e igualando las dos anteriores tendremos:

$$P_{\text{re}} = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} = N|m|. \quad (5-20)$$

Por tanto, el *poder de resolución* P_{re} viene determinado por el producto del orden interferencial en el que se trabaja por el número de rendijas de la red. Escribiendo el orden interferencial en función de la diferencia de camino óptico, $m = \Delta L/\lambda$, la anterior toma la forma:

$$P_{\text{re}} = \frac{\lambda}{(\Delta\lambda)_{\min}} = \frac{Nd(\text{sen } \theta_i - \text{sen } \theta')}{\lambda}, \quad (5-21)$$

donde el numerador es la diferencia de camino óptico entre los rayos extremos de la red (cuya longitud es $l = Nd$) para la dirección en cuestión. Como $|\text{sen } \theta_i - \text{sen } \theta'| \leq 2$, se tiene $P_{\text{re}} \leq 2l/\lambda$.

Comparando la expresión del poder de resolución espectral (5-20) de una red de difracción, con la correspondiente al interferómetro Fabry-Perot $P_{\text{re}} = m\mathcal{F}$, fórmula (2-41), se comprende la razón de porqué a la finura \mathcal{F} se le llama a veces “número efectivo de rayos”. En una red como la representada en la figura 5-3 (para otros tipos de redes véase la sección 5.4), el orden interferencial no puede ser muy grande ($m \lesssim 10$) debido al factor de forma I_d que impone la difracción, de modo que un P_{re} alto implica un número de rendijas elevado ($N \sim 10.000$). En el Fabry-Perot, en cambio, $m = 2n h/\lambda \sim 10.000$ es elevado, y $\mathcal{F} \sim 100$ toma valores intermedios, con lo que P_{re} puede ser sustancialmente mayor.

5.3.2 Dispersión angular

Si se desea medir λ con precisión usando una red de difracción, se requiere que la variación del ángulo θ' correspondiente a una pequeña variación de longitud de onda $\Delta\lambda$ sea lo mayor posible, es decir se requiere que la llamada *dispersión angular*, $d\theta'/d\lambda$, sea máxima. Derivando la ecuación de la red (5-14), suponiendo fijo el ángulo de incidencia θ_i , se obtiene:

$$\frac{d\theta'}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \theta'} \quad (5-22)$$

Por tanto, para obtener dispersiones elevadas, el espaciado de la red d debe ser pequeño y se debe trabajar en órdenes elevados (m grande).

5.3.3 Intervalo espectral libre

Con las redes de difracción puede ocurrir que se solapen dos órdenes distintos para dos λ diferentes, fenómeno que ya se ha analizado en el caso del interferómetro Fabry-Perot (sección 2.6.4). Así, se define el *intervalo espectral libre* como el máximo intervalo de longitud de onda $(\Delta\lambda)_{ie}$ para el que coincide la posición angular del máximo de orden $m + 1$ de λ y el de orden m de $\lambda + (\Delta\lambda)_{ie}$ (véase la Fig. 5-6). Usando nuevamente la ecuación de la red (5-14), se obtiene:

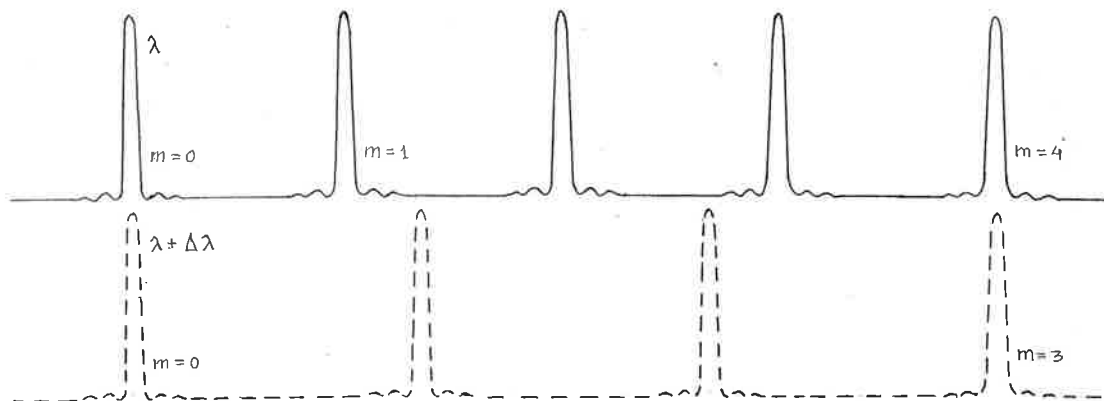


Figura 5-6 Solapamiento del máximo de orden 4 para λ con el de orden 3 para $\lambda + \Delta\lambda$ de una red de difracción.

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} \theta_i - \operatorname{sen} \theta'_\lambda)_{m+1} &= (\operatorname{sen} \theta_i - \operatorname{sen} \theta'_{\lambda+(\Delta\lambda)_{ie}})_m \\
&\downarrow \\
(m+1) \frac{\lambda}{d} &= m \frac{\lambda + (\Delta\lambda)_{ie}}{d} \quad (5-23) \\
&\downarrow \\
(\Delta\lambda)_{ie} &= \frac{\lambda}{m}.
\end{aligned}$$

Por tanto, el intervalo espectral libre es directamente proporcional a la longitud de onda λ e inversamente proporcional al orden m en que se trabaja. Como el poder de resolución espectral (5-20) y la dispersión angular (5-22) son directamente proporcionales a m , se requiere llegar a un compromiso en el valor de m en función del uso que se va a dar a la red. Ya se ha dicho que la red de la figura 5-3 sólo permite órdenes bajos ($m \lesssim 10$) debido al efecto de la difracción (I_d); en consecuencia para conseguir órdenes altos, es necesario diseñar redes de difracción diferentes. En la sección siguiente se discuten diferentes tipos de redes y se comenta la forma de trabajar con valores de m altos.

5.4 Tipos de redes de difracción

El principio de la red de difracción fue descubierto por Rittenhouse en 1785, pero pasó casi desapercibido hasta que fue redescubierto por Fraunhofer en 1819. Fraunhofer hizo sus primeras redes enrollando hilos muy finos alrededor de dos tornillos paralelos. Debido a la relativa facilidad con que se pueden construir estas *redes de hilos* todavía se usan a veces en las regiones infrarrojas lejana y extrema (λ grande). Posteriormente, con la ayuda de una máquina, Fraunhofer preparó redes haciendo trazos sobre una película de oro depositada sobre una lámina de vidrio, o bien directamente sobre la superficie del vidrio usando una punta de diamante.

En 1882 Rowland mejoró sustancialmente la preparación de redes gracias a que construyó varias máquinas trazadoras muy mejoradas, e inventó la llamada *red cóncava* formada por un espejo esférico cóncavo rayado. Con esta red de reflexión se gana luminosidad y se evita la lente colectora haciendo el conjunto más compacto, por lo que hoy día se sigue utilizando con frecuencia. Rowland llegó a trazar redes de hasta 15 cm

de extensión con una longitud de las “rendijas” de hasta 10 cm, una densidad de rayas superior a 600/mm y un poder de resolución $P_{re} > 150.000$. Más tarde Michelson consiguió llegar a $P_{re} \simeq 400.000$. La mayoría de las redes primitivas se trazaban sobre espejos metálicos y vidrios. Posteriormente las redes se trazan sobre películas de aluminio evaporadas. El aluminio tiene mayor reflectancia en el ultravioleta y, al ser blando, produce menos desgaste sobre la punta trazadora (usualmente de diamante).

Un aspecto práctico importante se refiere a los defectos que se producen durante el proceso de fabricación de las redes de difracción. Una red perfecta tendría todas las rayas/rendijas idénticas y estrictamente paralelas. Los defectos completamente aleatorios generan ruido de modo que el espectro aparece más borroso. Los defectos sistemáticos son mucho más dañinos puesto que pueden producir redes superpuestas a la que se trata de fabricar. Así, los errores periódicos del espaciado de la red dan lugar a líneas espúreas en el espectro producidas por los armónicos añadidos a la red. Estas líneas son conocidas como *parásitos* o *fantasmas* y normalmente son difíciles de distinguir de las verdaderas.

5.4.1 Redes de perfil controlado

Las redes del tipo mostrado en la figura 5-3 presentan varios inconvenientes que implican una pérdida considerable de eficiencia. De un lado, el máximo central de difracción, donde va a parar la mayor parte de la energía, corresponde al orden interferencial cero que, al no separar las diferentes λ , resulta inútil en espectroscopia. De otra parte, debido al factor de forma I_d de la difracción, sólo hay energía apreciable en los órdenes muy bajos (m próximo a la unidad), lo que es un problema para conseguir un poder de resolución alto de acuerdo con la fórmula (5-20). Además, la red difracta luz tanto en el orden m como en el simétrico $-m$, pero este último no aporta ninguna información nueva.

Para solucionar este tipo de problemas es necesario controlar la forma de las estrías durante el proceso de fabricación. La solución ideal sería producir estrías que cambien la fase de forma alternativa, operando de modo parecido a las zonas de Fresnel de la sección 3.6, con un factor de fase constante (variable a voluntad) que sitúe el máximo

del factor de forma en la dirección deseada. Pero la fabricación de redes de transmisión de este tipo es una tarea muy difícil. Una solución más práctica es usar redes de reflexión con la forma de las estrías deseada. Wood en 1910 fue el primero en conseguir formas predeterminadas de las estrías. Así, en la red de la figura 5-7, la mayor parte de la luz sale en la dirección del haz reflejado al que corresponde el máximo de difracción, y para esta dirección el orden interferencial es alto. Se habla de redes *brillantes* (del inglés *blazed*) para esa dirección y la λ en cuestión. En el caso mostrado en la figura 5-7, si $\alpha = 30^\circ$ y $d = 40 \mu\text{m}$, se tendrá la máxima intensidad para el orden $m = (d \sin 2\alpha) / \lambda \sim 70$. Con formas adecuadas de las estrías se llega a obtener $m \sim 1000$, hasta 4 estrías por mm y una extensión de red de hasta 250 mm, con lo que se consigue un poder de resolución de hasta 10^6 . Debido a la dificultad de fabricar este tipo de redes con alta calidad, se recurre a la fabricación de patrones muy costosos que se utilizan como moldes para hacer muchas *réplicas*. Actualmente se está imponiendo con rapidez la fabricación de redes por técnicas holográficas que presentan considerables ventajas, incluyendo el bajo coste. Este punto se discute con más detalle en el capítulo dedicado a la *holografía* en la última parte del curso.

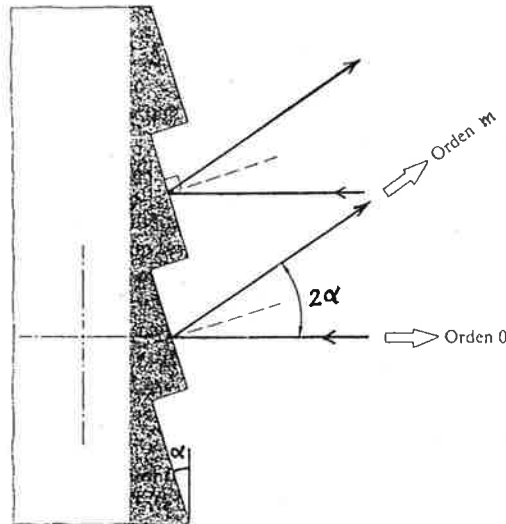


Figura 5-7 Sección transversal de una red de difracción con estrías que dan lugar a un máximo de difracción en la dirección del haz reflejado.

5.4.2 Espectroscopios de red

En la figura 5-8 se muestra un esquema de espectroscopio de red que utiliza un montaje compacto autocolimante debido a Littrow. En este montaje se utiliza la misma lente como colimadora y como colectora. Tanto la rendija de entrada de luz como la pantalla o el detector están ubicadas en el foco de la lente. La red trabaja por reflexión. En cualquier caso, se requiere un mecanismo de giro que sitúe la longitud de onda a estudiar sobre el detector o rendija. También se ha mencionado la red cóncava de Rowland que, gracias a la focalización que produce la curvatura de la red, incluso puede prescindir de la lente. Existen otras muchas variantes de montajes que el lector interesado debe consultar en los libros especializados.

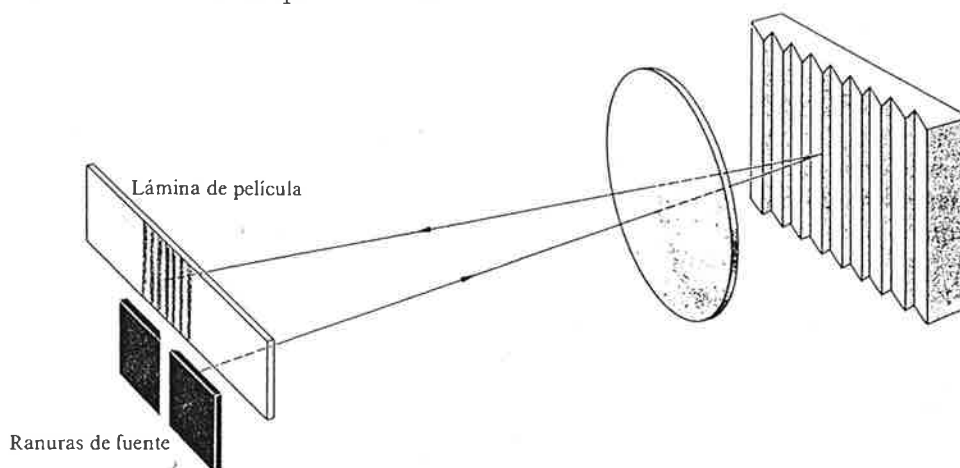


Figura 5-8 Montaje espectroscópico de red que usa el método autocolimante de Littrow.

5.4.3 Redes de dos y tres dimensiones

Hasta aquí sólo hemos considerado redes mono-dimensionales, pero el análisis realizado se puede extender a ordenamientos periódicos en dos y tres dimensiones. Las redes de dos dimensiones, llamadas *redes cruzadas*, tienen poco interés práctico, aunque sus efectos son fáciles de observar. Por ejemplo, mirando una fuente luminosa brillante y lejana a través de un tejido muy fino (visillo, pañuelo), se puede observar una imagen múltiple de la fuente producida por la difracción de la red del tejido.

Las redes de tres dimensiones, en cambio, tienen gran interés. El ejemplo más importante es el de las redes cristalinas, que producen figuras de difracción cuando son “iluminadas” con rayos X de λ similar a la distancia entre átomos. Gracias a estas figuras de difracción se puede acceder al conocimiento microscópico del ordenamiento de los átomos en la materia. Dentro del espectro visible y sus proximidades, también son de gran utilidad las redes de tres dimensiones, llamadas *redes de volumen*. Las más útiles son las basadas en la modificación del índice de refracción del material (por tanto son *redes de fase*) que almacenan información en el interior del material. El índice de refracción se puede modificar por métodos termoópticos, acustoópticos, electroópticos, magnetoópticos o por efecto no-lineal de la propia luz. Las redes pueden ser “grabadas” y “borradas” ópticamente, o bien ser modificadas en tiempo real y entonces se convierten en procesadores ópticos (amplificadores y/o computadores ópticos).

Capítulo 6

Teoría difraccional de la formación de imágenes

6.1 *Introducción*

En la parte dedicada a la óptica geométrica se esbozó la complejidad del diseño de un instrumento óptico, cuando se desean imágenes de alta calidad, debido a la exigencia de que las aberraciones geométricas y cromática queden altamente corregidas. Pero, a medida que un buen diseño va mejorando la corrección de las aberraciones, llega un punto en el que una corrección adicional no produce mejora en la calidad de la imagen. Esto se debe a los efectos que produce la difracción según se ha visto en los capítulos anteriores (empieza a fallar el modelo de rayos). Por tanto, un análisis riguroso debería tratar de modo simultáneo ambos efectos, aberraciones y difracción. Sin embargo, dada la complejidad del tema, aquí nos limitaremos a estudiar una aproximación más asequible. Supondremos que las aberraciones del sistema considerado están corregidas hasta el punto en que sus efectos se pueden despreciar frente a los efectos de la difracción, es decir el sistema es “perfecto” desde el punto de vista geométrico y podemos centrarnos exclusivamente en los aspectos difraccionales.

Una primera aproximación a este problema se ha visto al tratar del poder de resolución de los instrumentos ópticos en la sección 4.4. Allí se ha evaluado el efecto de la difracción en términos del mayor o menor solapamiento de las manchas de Airy asociadas a dos puntos objeto. Este modo de tratar el problema presenta dos limitaciones importantes. De un lado, sólo tiene en cuenta el efecto de la difracción en el caso de dos puntos muy próximos, sin suministrar una evaluación sobre la calidad general de la imagen formada

por una infinidad de puntos. De otro lado, se ha supuesto que los dos puntos objeto emiten luz de modo totalmente incoherente. Esta situación se da con buena aproximación en los casos presentados en la citada sección 4.4, pero puede ocurrir que la emisión de los puntos del objeto se haga de modo coherente o parcialmente coherente, como es el caso de ciertos tipos de iluminación en el microscopio.

En este último capítulo se aborda el papel que juega la difracción en la formación de las imágenes, desde un punto de vista más general que el de la sección 4.4. No obstante, además de limitarnos al caso de sistemas gaussianos como se ha mencionado antes, sólo se considerarán los casos extremos de iluminación completamente incoherente o completamente coherente.[†] Después de comentar brevemente el problema de la iluminación en el microscopio, se introducen las ideas básicas de la teoría de Abbe sobre este instrumento en el caso de iluminación coherente. Esta teoría supuso en su momento el inicio de una nueva manera de enfocar el problema de la formación de la imagen, en la cual se contempla el efecto de la difracción como un impedimento que opone el sistema óptico para “pasar” a la imagen las frecuencias espaciales altas que están presentes en el objeto. Se discuten las posibilidades que abre esta teoría para mejorar la imagen mediante la realización de ciertas manipulaciones en un plano intermedio entre objeto e imagen (el llamado *plano de Fourier*). Por último se introduce el método moderno de la *función de transmisión* del sistema óptico mediante el análisis puntual de la formación de la imagen.

6.2 El problema de la iluminación en el microscopio

Como regla general, los objetos que se observan con un microscopio no son luminosos por sí mismos y requieren algún tipo de iluminación externa que los haga visibles. Dependiendo del sistema óptico utilizado para iluminar, los conos de luz procedentes de dos puntos próximos del objeto presentarán un cierto grado de correlación o coherencia (coherencia parcial) y, como consecuencia, el análisis se complica considerablemente.

[†]El lector interesado en un tratamiento general puede consultar los libros *Optics* de Klein o *Principles of Optics* de Born y Wolf.

Aunque este problema se pone de manifiesto de modo más acusado en el microscopio, también está presente en otros instrumentos con carácter general. Aquí consideraremos solamente los dos casos extremos más sencillos de iluminación en el microscopio: totalmente incoherente y perfectamente coherente.

6.2.1 Iluminación incoherente

El caso completamente incoherente sólo se da en rigor si el objeto es autoluminoso, pero se puede conseguir aproximadamente con el método llamado *iluminación crítica*. En este método, ilustrado esquemáticamente en la figura 6-1a, una lente condensadora C forma una imagen S' de la fuente luminosa S sobre el plano objeto II. En estas condiciones el objeto parece emitir luz por sí mismo de manera incoherente como la propia fuente, aunque modulando la intensidad de acuerdo con su transmitancia (o reflectancia). Esta

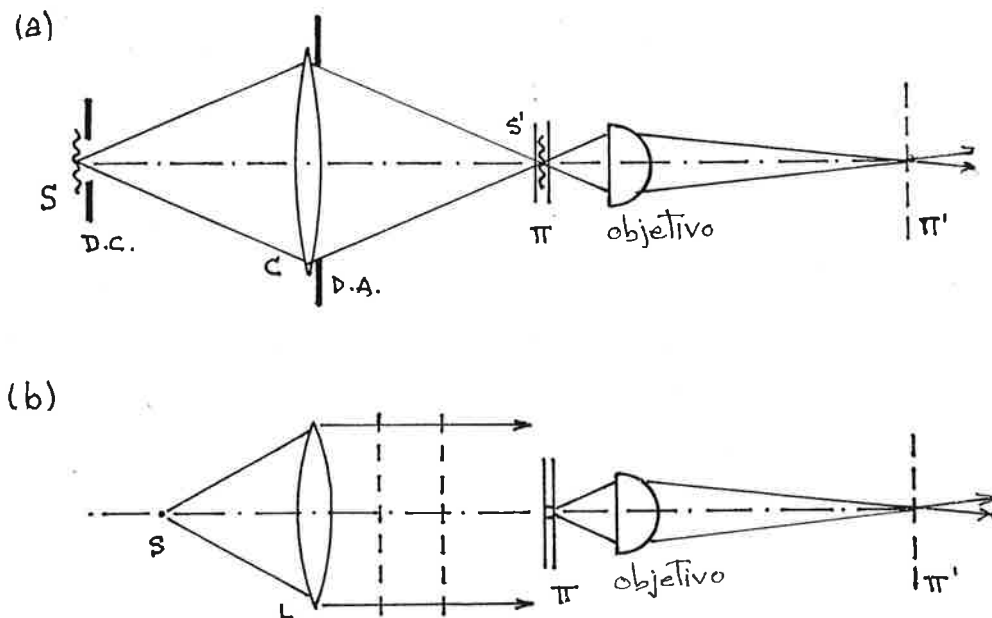


Figura 6-1 (a) En el método de iluminación crítica (incoherente), la lente condensadora C forma una imagen S' de la fuente S sobre el plano objeto II; para que la iluminación sea homogénea la fuente S consiste en un vidrio esmerilado. (b) Sistema simplificado para obtener iluminación coherente (para colocar los diafragmas de apertura y de campo adecuadamente, el sistema real es más complejo). La fuente monocromática puntual S situada en el foco objeto de la lente L da lugar a un frente de onda plano que ilumina el plano objeto II; todos los puntos del objeto que son iluminados emiten de manera aproximadamente coherente.

luz modulada es la que da la imagen real del objeto en el plano Π' . En realidad el condensador C representa en el plano objeto cada punto de S como una mancha de Airy que se solapa con las de los puntos próximos. Como consecuencia, los puntos del objeto iluminados por la misma mancha de Airy guardan alguna coherencia entre sí.[†] Además, se suele usar un vidrio esmerilado delante de la fuente para conseguir mayor homogeneidad en la iluminación, y esto aumenta el grado de coherencia porque cada punto de la fuente primaria ilumina todos los puntos del vidrio. Como se indica en la figura 6-1a, el sistema de iluminación permite incluir los diafragmas de abertura D.A. (que limita el cono de rayos) y de campo D.C. que limita la parte del objeto que se desea ver.

6.2.2 Iluminación coherente

En este caso el objeto debería estar iluminado por una onda plana estrictamente coherente en toda la región que se encuentra iluminada. La mejor aproximación a este tipo de iluminación se consigue mediante la luz laser debido su alta coherencia espacial y temporal. También se puede conseguir una aproximación razonable a la iluminación coherente mediante el sistema representado de forma simplificada en la figura 6-1b. Una fuente puntual S suficientemente monocromática se sitúa en el foco objeto de una lente L bien corregida. En estas condiciones el frente de onda plano a la salida ilumina el plano objeto Π de modo aproximadamente coherente. Cuanto menos puntual y menos monocromática sea la fuente S mas lejos estaremos de una iluminación coherente.

6.3 Teoría de Abbe para iluminación coherente

El origen de la teoría de Abbe hay que situarlo en una pequeña empresa de Jena (Alemania) que a mediados del siglo pasado se dedicaba a la fabricación de microscopios. En esta empresa se encontraban dificultades para mejorar el poder de resolución de los microscopios con las técnicas empíricas que se utilizaban en la época. Por ello, el

[†]El nombre de "iluminación crítica" se debe a que al principio se consideraba crítico un buen enfoque de la fuente sobre el objeto; pero debido a la mancha de Airy que produce la difracción no es tan crítico.

propietario de la empresa Carl Zeiss, contrató en 1866 los servicios del profesor Ernst Abbe (de la Universidad de Jena) con el objeto de establecer un método científico para el diseño de los instrumentos. El trabajo de varios años llevó a Abbe a formular una nueva teoría sobre la formación de la imagen, que inicialmente no fue aceptada debido al cambio tan radical que suponía.

De acuerdo con la teoría de Abbe, la formación de la imagen implica dos procesos de difracción, uno en el objeto (el objeto también es un difractor) y otro en el objetivo del microscopio. La descripción de la teoría se hace de modo más sencillo suponiendo que el objeto es periódico, tal como se ha hecho en la figura 6-2 en la que se utiliza como objeto una red de difracción simple (véase la Fig. 5-3). La luz difractada por la red es focalizada por el objetivo en su plano focal, formando los diferentes máximos principales y secundarios. Los máximos principales contienen la mayor parte de la energía y se suelen identificar por su orden interferencial m como fuentes S'_m . La luz que continúa a partir de las fuentes interfiere en la pantalla produciendo la imagen de la red. El efecto de la difracción en la abertura finita del objetivo se pone de manifiesto porque parte de

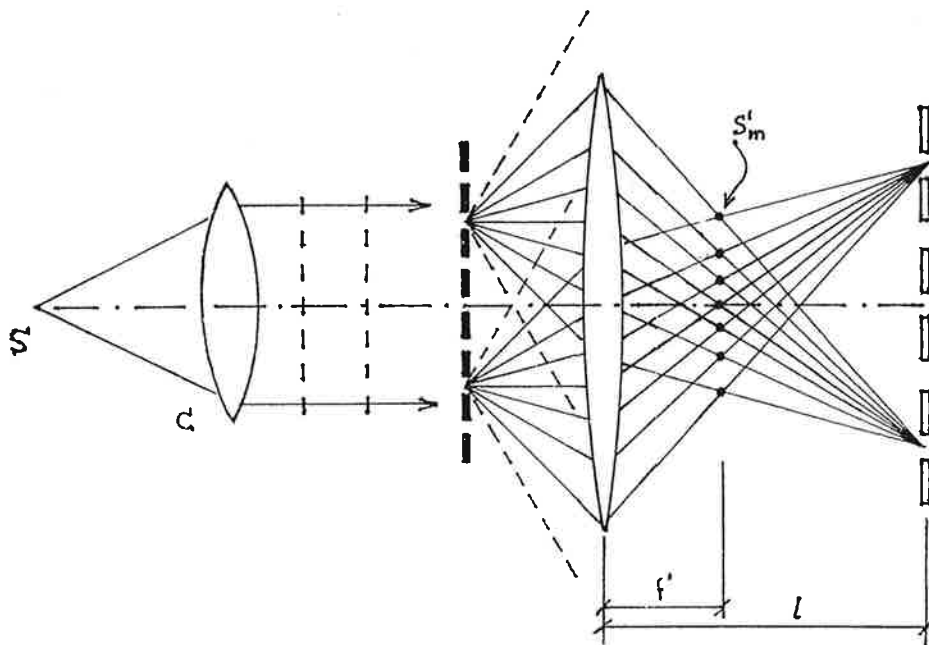


Figura 6-2 Ilustración de la teoría de Abbe mediante la formación de la imagen de una red de difracción por un objetivo de microscopio, usando iluminación coherente. Típicamente $l \sim 160$ mm y $f' \sim 1$ mm, es decir, $f' \ll l$, pero esta proporción no se ha mantenido en la figura para que las fuentes S'_m sean visibles.

la luz difractada en la red no es recogida por el objetivo y por tanto no es focalizada en su plano focal. Esta luz corresponde a los ángulos de difracción mayores y es más intensa cuanto mayor es la frecuencia espacial de la red; como no contribuye a la formación de la imagen, ésta pierde detalle en las altas frecuencias respecto a la red objeto.

Un procedimiento equivalente consiste en considerar la transición del objeto a la imagen matemáticamente, por medio de las transformaciones de Fourier asociadas respectivamente a las dos difracciones de Fraunhofer. Por la primera difracción en la red, se obtiene su transformada de Fourier (en direcciones). Esta transformada es representada por el objetivo en su plano focal, o plano de Fourier, formando las fuentes S'_m . Por la segunda difracción en la abertura del objetivo, se obtiene la transformada inversa de Fourier de la anterior, y por tanto se recupera la red original en el plano imagen (salvo el aumento lateral del sistema). Debido a que la primera transformada no es recogida en su totalidad por el objetivo dada su abertura limitada (faltan fuentes S'_m), la transformada inversa tampoco representa con absoluta fidelidad a la red inicial; tanto menos fielmente cuanto menor sea el número de fuentes S'_m que se han formado.

Esta interpretación explicaba las primeras observaciones experimentales de Abbe, que encontraba mayor resolución en la imagen usando objetivos de mayor abertura aunque el cono de luz procedente de la red objeto no llenara completamente la abertura. Todo indicaba que la “zona oscura” del objetivo contribuía al aumento del poder de resolución, apuntando a que el procedimiento de la mancha de Airy utilizado con iluminación incoherente (sección 4.4.2) operaba de forma diferente con iluminación coherente. En realidad la “zona oscura” recibe luz de órdenes difraccionales más altos que los que recibe la “zona iluminada” y por tanto es más débil en general.

6.3.1 Poder de resolución en la teoría de Abbe

Red objeto y plano de Fourier

Para determinar el límite del poder de resolución en el marco de la teoría de Abbe nos apoyaremos en la red de difracción objeto mencionada antes, cuya transmisión se ha representado en la figura 6-3, y discutiremos cual es la frecuencia de red más alta de la

cual se puede formar una imagen. Esta red objeto viene descrita por la función:

$$\begin{aligned} E(x) &= E_0 \quad \text{para: } jd - a < x < jd + a \quad \left(j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm \frac{N-1}{2} \right) \\ E(x) &= 0 \quad \text{para los restantes valores de } x. \end{aligned} \quad (6-1)$$

Para comparar posteriormente este objeto con la imagen, es útil escribir el desarrollo en serie de Fourier de la función objeto:

$$E(x) = \frac{NE_0 2a}{d} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\text{sen} \frac{j 2\pi a}{d}}{\frac{j 2\pi a}{d}} \cos \frac{j 2\pi x}{d} \right). \quad (6-2)$$

Consideremos ahora el resultado de la primera difracción de Fraunhofer en este objeto. Ésto ha sido estudiado en la sección 5.2 y viene dado por la fórmula (5-8):

$$E(\xi) = 2a C \frac{\text{sen} [k(\alpha - \alpha') a]}{k(\alpha - \alpha') a} \frac{1 - e^{iNkd(\alpha - \alpha')}}{1 - e^{ikd(\alpha - \alpha')}}; \quad (6-3)$$

el segundo factor de esta función corresponde a los máximos principales de interferencia (cuya intensidad se representa en la Fig. 5-5b), los cuales están representados por las fuentes S'_m en la figura 6-2. El primer factor modula la intensidad de estos máximos y (según se vé en la Fig. 5-5c) hace que la energía que llega a las fuentes S'_m con $m \neq 0$ sea relativamente mayor cuanto menor sea la abertura $2a$ de una rendija.

Red imagen

Por otra parte, el modo de tratar la segunda difracción debida a la abertura del objetivo se presenta en el apéndice 6.9.1. El resultado es el siguiente sumatorio que se extiende sobre las fuentes S'_m :

$$E'(x') = E'_0 \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{N'} \frac{\text{sen} \frac{m 2\pi a'}{d'}}{\frac{m 2\pi a'}{d'}} \cos \frac{m 2\pi x'}{d'} \right), \quad (6-4)$$

donde $d' = \beta' d$, $a' = \beta' a$, $x' = \beta' x$, siendo β' el aumento lateral del objetivo, y m indica las dos fuentes $S'_{\pm m}$ correspondientes a ese orden difraccional en el plano de Fourier. Cuando $N' \rightarrow \infty$, el sumatorio anterior se extiende sobre todas las fuentes S'_m (el objetivo debería tener diámetro infinito para que se pudieran formar), y la expresión (6-4) es proporcional a la (6-2) como debía ser; la única diferencia consiste en que las magnitudes

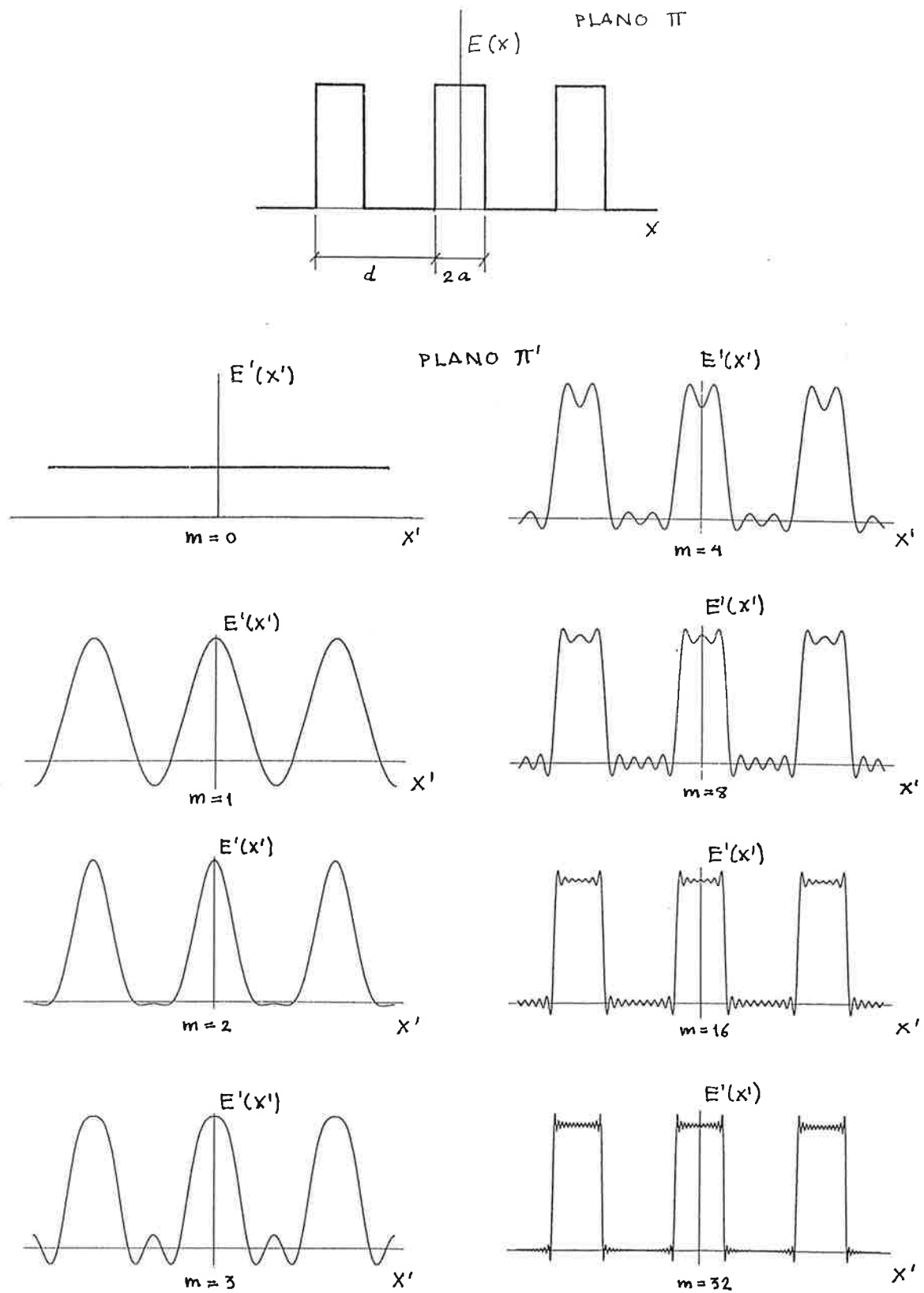


Figura 6-3 Red de difracción en el plano objeto II, y su imagen en el plano II', cuando la abertura del objetivo permite la contribución de distinto número de fuentes: S'_m (el número de fuentes m se indica en las gráficas).

correspondientes en ambas expresiones se relacionan por medio del aumento lateral β' .

Supresión de órdenes

Analicemos ahora el efecto de suprimir algunas de las fuentes S'_m . Si el sumatorio de (6-4) no contiene todas las fuentes S'_m , la red imagen no será una reproducción realmente fiel de la red objeto. Supongamos la situación extrema en que la difracción en el objetivo sólo deja pasar el orden difraccional $m=0$, es decir la fuente S'_0 . En ese caso se tiene $E'(x') = E'_0 = cté$, por tanto la pantalla aparece iluminada homogéneamente, desapareciendo todo vestigio de la red objeto (caso $m=0$ en la Fig. 6-3). En el caso en que esté también presente el orden difraccional $m=1$ (las fuentes $S_{\pm 1}$), se tiene:

$$E'(x') = E'_0 \left(1 + 2 \frac{\frac{\text{sen } \frac{2\pi a'}{d'}}{2\pi a'}}{d'} \cos \frac{2\pi x'}{d'} \right), \quad (6-5)$$

de modo que al menos la periodicidad es correcta ($x/d = x'/d'$) como se puede apreciar en la figura 6-3 para $m=1$, aunque la distribución de amplitud todavía difiere mucho de la del objeto. A medida que están presentes más órdenes, la distribución de amplitud en la imagen reproduce más fielmente el objeto, como se puede observar en la figura 6-3 para el caso $m=32$. Por otra parte, si se excluyen los órdenes más bajos (que llevan mucha energía) se obtiene una imagen completamente falsa. Por ejemplo, excluyendo los dos primeros órdenes y todos los demás excepto el segundo, se tiene:

$$E'(x') = 2 E'_0 \frac{\frac{\text{sen } \frac{4\pi a'}{d'}}{4\pi a'}}{d'} \cos \frac{4\pi x'}{d'} = 2 E'_0 \frac{\frac{\text{sen } \frac{4\pi a'}{d'}}{4\pi a'}}{d'} \cos \frac{2\pi x'}{\frac{d'}{2}}, \quad (6-6)$$

de modo que la imagen exhibe un periodo $d'/2$ que es la mitad del de la red original, y por tanto, doble número de líneas.

Poder de resolución

Siguiendo a Abbe, convendremos en definir el límite de resolución cuando se tiene al menos la periodicidad correcta, lo cual ocurre cuando pasan los órdenes 0 y 1, fuentes

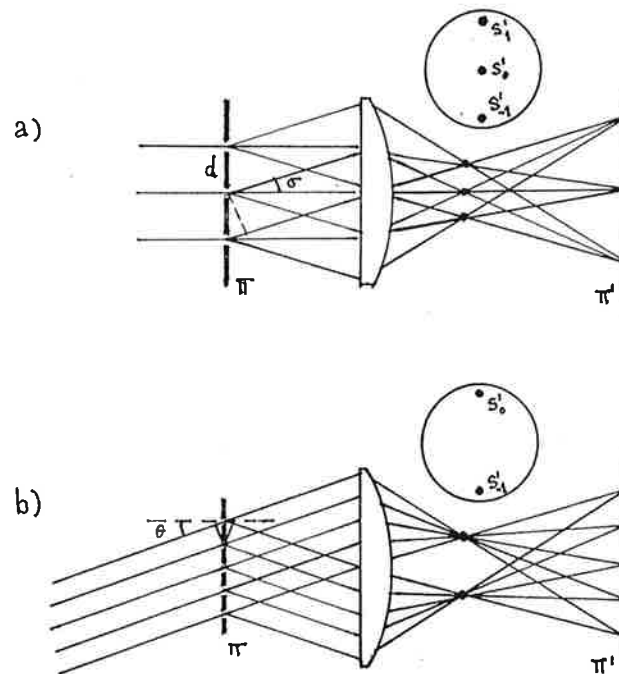


Figura 6-4 Determinación del período d más pequeño que se puede representar en la imagen de acuerdo con el criterio de Abbe sobre el poder de resolución. (a) Cuando contribuyen las fuentes S'_0 y $S'_{\pm 1}$. (b) Cuando sólo contribuyen la S'_0 y la S'_{+1} .

S'_0 y $S'_{\pm 1}$ (caso $m = 1$ en la Fig. 6-3). De acuerdo con este convenio, la red con período más pequeño que se puede reproducir en la imagen, viene determinado por la citada condición de que al menos exista el orden $m = 1$. Para ese orden, la diferencia de camino óptico entre los rayos es $\Delta L = d \sin \sigma = \lambda$ (véase la Fig. 6-4a) de donde se tiene:

$$d = \frac{\lambda_0}{n \sin \sigma} \quad (6-7)$$

Por tanto, se obtiene esencialmente la misma expresión que para iluminación incoherente, recuérdese la (4-19). De hecho, si utilizamos incidencia inclinada para iluminar el objeto (Fig. 6-4b) de manera que sólo se forme la fuente S'_{+1} y no la S'_{-1} , no se pierde la periodicidad de la red y se tiene:

$$d = 0,5 \frac{\lambda_0}{n \sin \sigma} ; \quad (6-8)$$

es decir, el período mínimo resuelto es la mitad (véase la Fig. 6-4b). Por tanto, el factor próximo a la unidad que aparece en estas expresiones tiene un cierto grado de arbitra-

riedad, al igual que lo tiene el propio convenio empleado para el poder de resolución. Pero persiste el hecho de que la abertura numérica $A.N. = n \sin \sigma$ es la que determina el poder de resolución del objetivo para una λ_0 prefijada. Aunque la teoría de Abbe ha suministrado una expresión para el poder de resolución que no añade nada nuevo, en lo que sigue veremos que es un poderoso método para el tratamiento de imágenes.

6.4 El procesador óptico $4f$. Filtrado de frecuencias espaciales

El hecho de que Abbe hiciera notar la presencia de la transformada de Fourier del objeto como un paso intermedio en la formación de la imagen, lleva a la posibilidad de procesar la imagen manipulando el plano de Fourier. En la figura 6-5 se ha representado el llamado *procesador óptico $4f$* , con el que se ilustra de manera sencilla el método. Se trata de un sistema formado por dos lentes de igual focal f colocadas a una distancia

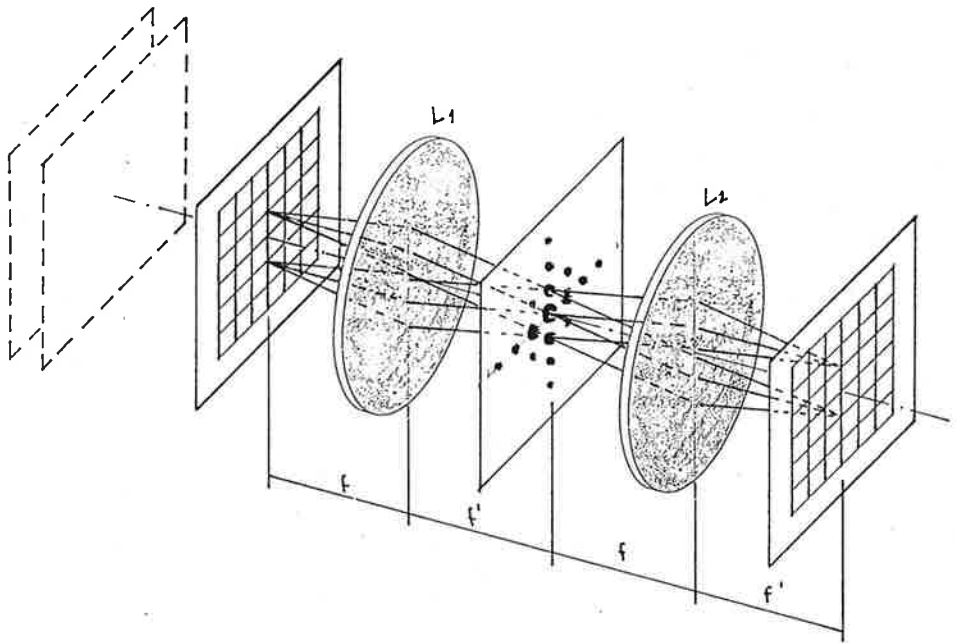


Figura 6-5 Procesador óptico $4f$ consistente en dos lentes de la misma focal f situadas a la distancia $2f$. La imagen a tratar se coloca en el foco objeto F_1 de la primera lente; el plano de Fourier está en el punto intermedio entre las lentes coincidiendo con los focos $F'_1 = F_2$; y la imagen procesada, invertida y del mismo tamaño, se obtiene en el foco imagen F'_2 de la segunda lente.

relativa $2f$. El objeto que se desea procesar se coloca en el plano focal objeto de la primera lente F_1 ; entonces, la transformada de Fourier se forma en $F'_1 = F_2$ y la imagen procesada se forma en el plano focal imagen de la segunda F'_2 , invertida y del mismo tamaño.

Como en el plano de Fourier se sitúan las diferentes frecuencias espaciales del objeto separadamente, resulta posible modificarlas de modo selectivo mediante la colocación de una máscara adecuada en dicho plano. Al atenuar o eliminar algunas de estas frecuencias se obtiene un cierto efecto deseado en la imagen. Así, para el retículo cuadrado que actúa como objeto en la figura 6-5, las líneas horizontales del mismo están representadas en el plano de Fourier por la estructura de puntos vertical, y las líneas verticales por la horizontal. Si, mediante una máscara adecuada en el plano de Fourier, se eliminan todos los puntos excepto la fila central vertical, en la imagen sólo aparecerán las líneas horizontales. Tomemos como ejemplo la fotografía de un animal enjaulado cuya imagen está superpuesta a los barrotes verticales de la jaula; colocando en el plano de Fourier una máscara que tape los puntos bien definidos correspondientes a los barrotes, éstos serían eliminados de la imagen final, en la cual aparecería el animal libre sin apenas ser afectado por la máscara. Esto es así porque la transformada de Fourier del animal tiene una distribución de intensidad muy irregular y los pequeños puntos oscuros de la máscara apenas la modifican. Este proceso de manipulación se llama *filtrado espacial de frecuencias*, puesto que permite eliminar en las imágenes ciertas periodicidades molestas que se encuentran en los objetos.

6.5 Instrumentos ópticos como sistemas lineales

La teoría de Abbe abre una nueva perspectiva en el modo de analizar y mejorar la formación de la imagen en los instrumentos ópticos. De una manera natural, lleva a considerar los instrumentos ópticos como sistemas lineales que transportan información desde el plano objeto al plano imagen. La linealidad del proceso de formación de la imagen se basa en la linealidad de la transformación de Fourier que se usa en la teoría de Abbe. En estas condiciones se pueden aplicar con provecho los métodos de tratamiento

bien establecidos para este tipo de sistemas en el campo de las comunicaciones y en otros muchos. Al igual que en un sistema lineal de comunicación, en el proceso de formación de una imagen están presentes: un *emisor* de información (el objeto), un *canal* que transporta, y modifica parcialmente, esa información (el instrumento óptico), y un *receptor* de la información (el plano imagen).

Existen dos métodos típicos, relacionados entre sí, que se usan para caracterizar la calidad del “canal de transmisión” (el instrumento óptico en nuestro caso). En el método de la *propagación de un impulso* se introduce una función impulso a través del sistema y se mide el resultado a la salida: *función respuesta a un impulso*. En el caso de un instrumento óptico, una función impulso está representada por un objeto puntual (delta de Dirac) que emite luz, y el resultado producido por el sistema es una mancha de difracción de Airy o función de punto extendido en el plano imagen (véase la Fig. 6-6a).

En el método de la *función de transmisión* se introduce una función armónica a través del sistema y se determina cómo quedan afectadas su amplitud y su fase a la salida del mismo. Para un instrumento óptico, se puede utilizar como función armónica aproximada una transparencia formada por bandas claras y oscuras separadas por un periodo espacial $\Lambda = 1/s$ para las que la modulación de la densidad óptica es una función seno o coseno. (Para que sea una buena aproximación se requiere que contenga muchas franjas y que éstas sean mucho más largas que su separación Λ). La *función de transmisión* (“*optical transfer function*” o *OTF*) del instrumento es la que determina las modificaciones que sufre la modulación de la densidad óptica en la amplitud y en la fase para cada frecuencia espacial s de la transparencia objeto (véase la Fig. 6-6b). El filtrado de frecuencias espaciales visto en la sección 6.4 es en realidad un ejemplo de modificación selectiva de la función de transmisión de un instrumento óptico, sea en la amplitud o en la fase. Como ocurre en cualquier sistema lineal, veremos que en los instrumentos ópticos existe una relación de transformación de Fourier entre la función respuesta a un impulso y la función de transmisión. En lo que sigue se dan más detalles sobre esta manera de analizar la formación de la imagen.

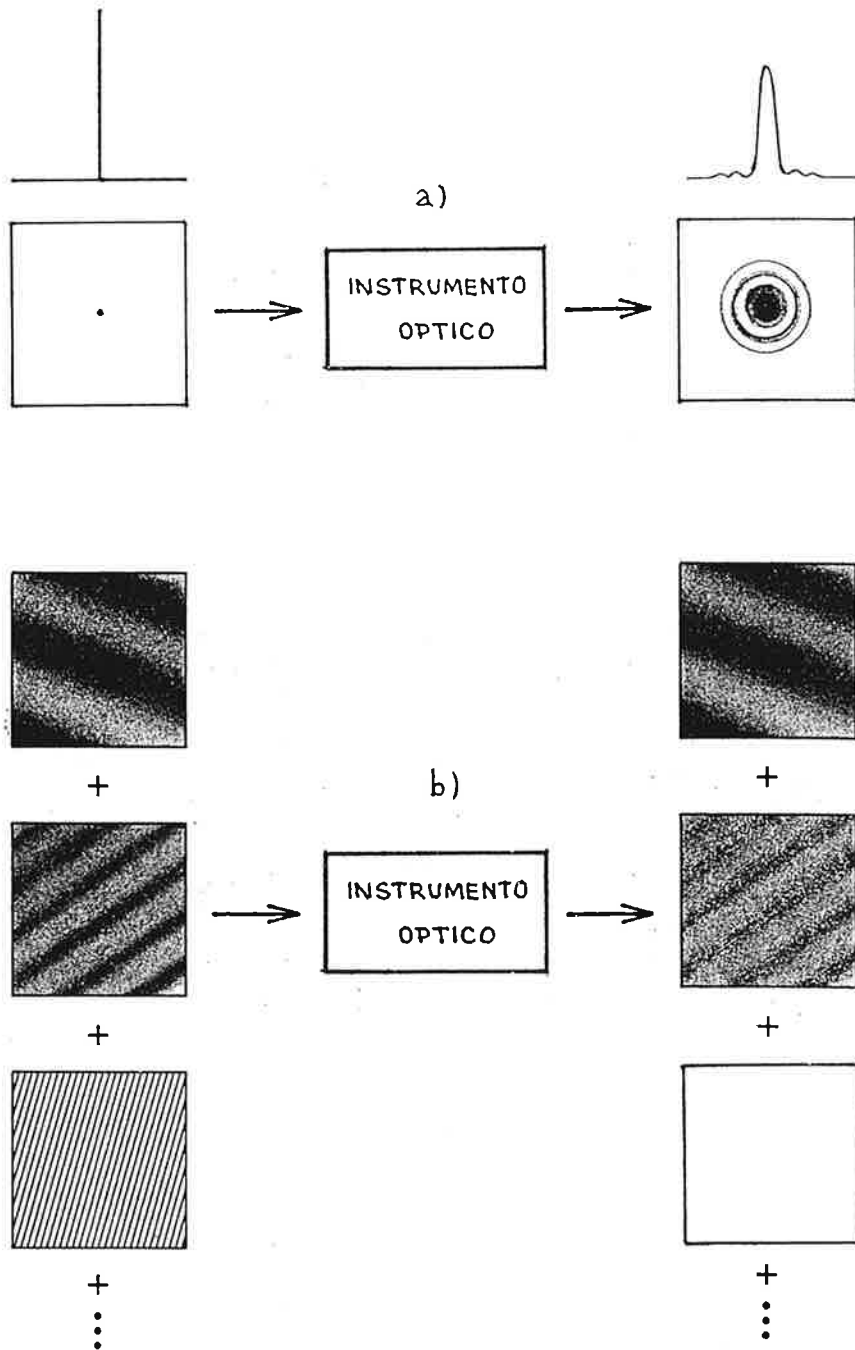


Figura 6-6 Métodos para caracterizar la calidad de un instrumento óptico: (a) "Propagación de un impulso" o imagen de un objeto puntual. (b) "Transmisión de funciones armónicas" o imágenes de transparencias cuya densidad óptica es una función seno o coseno. En este segundo caso, la frecuencia espacial más alta no aparece en la imagen porque ha sido filtrada por el instrumento.

6.6 Objeto puntual sobre el eje (función impulso)

De acuerdo con la sección anterior, la aplicación del método de propagación de una función impulso consiste en analizar la imagen que produce el instrumento óptico de un objeto puntual. Suponiendo que el instrumento está bien corregido de aberraciones (geométricamente perfecto o gaussiano), la imagen será la mancha de Airy estudiada en la sección 4.3. Así, para el caso del punto O del eje, de coordenadas $[0, 0]$ en el plano objeto Π (véase la Fig. 6-7), la imagen que da el instrumento es la mancha de Airy centrada en la imagen gaussiana O' , de coordenadas $[0, 0]$ en el plano Π' , y su distribución de amplitud viene dada por la integral (3-37):

$$E(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} E(\xi, \eta) e^{-ik(\alpha'\xi + \beta'\eta)} d\xi d\eta, \quad (6-9)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\alpha = \beta = 0$ al estar el punto O en el eje. Es conveniente escribir esta integral en una forma algo diferente. En primer lugar, haremos explícitas las coordenadas $[x', y']$ del punto P en Π' sustituyendo los cosenos directores $\alpha' = x'/R$ y $\beta' = y'/R$ (siendo R la distancia de la abertura al plano imagen). Por otro lado, normalizaremos esta función de Airy del siguiente modo: llamaremos $H(x', y')$ a la amplitud compleja $E(x', y')$ producida en el plano imagen por un objeto puntual cuya amplitud

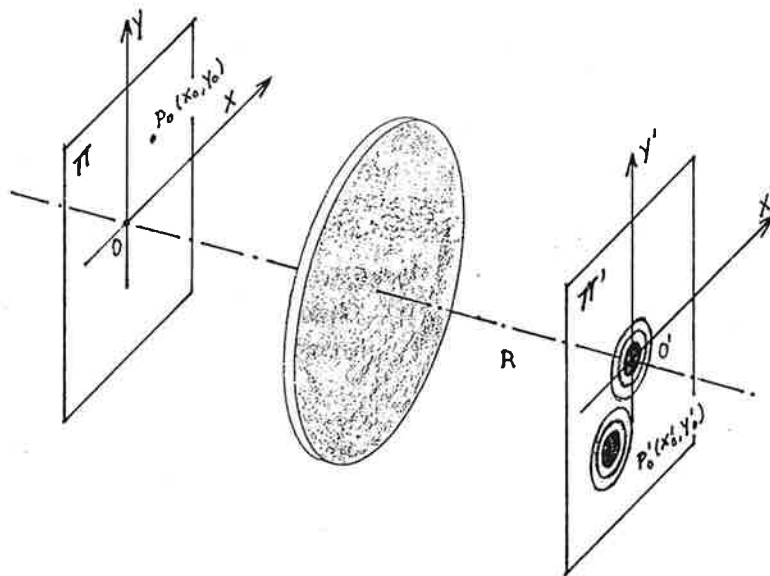


Figura 6-7 Imagen de un objeto puntual producida por un instrumento óptico gaussiano.

de emisión es real e igual a la unidad (módulo 1 y fase cero). Además, por conveniencia, incluiremos un factor $1/(\lambda R)^2$, haremos que las unidades de $E(\xi, \eta)$ sean m^{-2} y denominaremos esta función pupila mediante $P(\xi, \eta)$. De este modo, las unidades de $H(x', y')$ también serán las de m^{-2} . En estas condiciones, la integral anterior (6-9) se escribe de la siguiente forma:

$$H(x', y') = \frac{1}{(\lambda R)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi, \eta) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda R}(\xi x' + \eta y')} d\xi d\eta ; \quad (6-10)$$

Función de punto extendido (respuesta a un impulso)

en los instrumentos ordinarios la función pupila $P(\xi, \eta)$ es constante en toda la abertura y nula fuera de ella. Por otra parte, la función $|H(x', y')|^2$ representa una intensidad “normalizada” en el plano imagen.

6.7 Análisis puntual de un objeto extenso (emisión coherente)

La formación de la imagen de un objeto extenso, cuyos puntos supondremos que emiten o están iluminados de forma coherente, se puede analizar considerando cada punto como un emisor puntual (δ de Dirac o función impulso). Entonces, la imagen de cada punto será una mancha de Airy centrada en la imagen gaussiana del punto (dado que hemos supuesto un instrumento libre de aberraciones) y la imagen completa se obtendrá por superposición de las amplitudes de todas esas manchas.

Para facilitar el análisis, especificaremos los puntos del plano objeto por medio de coordenadas $[X, Y]$ en una escala normalizada por el aumento lateral. Así, si las coordenadas de un punto del plano objeto son $[x, y]$ y el aumento lateral es β' , tendremos[†]

$$X = \beta' x , \quad Y = \beta' y ; \quad (6-11)$$

de este modo las coordenadas de un punto objeto y las de su imagen gaussiana en el plano imagen tienen los mismos valores numéricos. Consideremos ahora un punto genérico del

[†]No confundir el aumento lateral, que normalmente se representa por β' , con el coseno director representado por la misma letra griega.

objeto $P_0[X_0, Y_0]$ cuya imagen gaussiana es el punto $P'_0[x'_0, y'_0]$ (Fig. 6-7). Como el sistema óptico se supone “geoméricamente perfecto” (satisface la simetría de traslación) la mancha de Airy normalizada correspondiente a P_0 es idéntica a la correspondiente al punto del eje O, expresión (6-10), salvo que ahora está centrada en P'_0 en vez de en O'. Por tanto será simplemente la función (6-10) trasladada al punto $[x'_0, y'_0]$, es decir:

$$H(x', y', X_0, Y_0) = H(x' - x'_0, y' - y'_0) = H(x' - X_0, y' - Y_0), \quad (6-12)$$

donde se ha tenido en cuenta el cambio de escala (6-11).

Si la distribución de amplitud del objeto extenso en el plano II viene dada por la función $E_{\text{obj}}(X, Y)$, la imagen del punto $[X, Y]$ será la función de Airy normalizada (6-12), pero modulada por amplitud $E_{\text{obj}}(X, Y)$ con que emite ese punto. Por tanto, la contribución del punto objeto $[X, Y]$ a la amplitud $E_{\text{im}}(x', y')$ en el punto $[x', y']$ del plano imagen será el producto:

$$dE_{\text{im}}(x', y') = E_{\text{obj}}(X, Y) H(x' - X, y' - Y) dX dY \quad (6-13)$$

y la amplitud $E_{\text{im}}(x', y')$ en $[x', y']$ debida a todos los puntos del objeto será simplemente la integral:

$$E_{\text{im}}(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\text{obj}}(X, Y) H(x' - X, y' - Y) dX dY. \quad (6-14)$$

Aunque la integral se extiende formalmente hasta infinito, sólo es distinta de cero en el objeto. Por otra parte, cada mancha de Airy es infinita en principio, pero como la amplitud disminuye rápidamente al alejarnos de su centro, sólo contribuyen de forma importante las manchas de los puntos próximos al $[X, Y]$ cuya imagen gaussiana es el $[x', y']$. Esta integral indica que la amplitud en la imagen $E_{\text{im}}(x', y')$ es la convolución de la amplitud en el objeto $E_{\text{obj}}(X, Y)$ con la función de punto extendido $H(x', y')$ dada por (6-10). Si no existiera la difracción en la abertura del instrumento (abertura infinita) ni otras pérdidas, la función $H(x', y')$ sería un punto o *delta* de Dirac de amplitud unidad. Entonces, la fórmula anterior (6-14) daría, para cada punto objeto $[X, Y]$, un punto imagen situado en la posición gaussiana $[x', y'] = [X, Y]$ y de amplitud $E(X, Y)$. Por tanto, como era de prever, al igual que en el tratamiento sencillo de la sección 4.4, la

mayor o menor extensión de la función de punto extendido $H(x', y')$ determina la mayor o menor calidad de la imagen.

6.8 Transmisión de frecuencias espaciales

6.8.1 Función de transmisión

La conexión entre el análisis puntual de la formación de la imagen y la teoría de Abbe ahora surge de modo natural. Aplicando el teorema de convolución a la integral (6-14), se obtiene que la transformada de Fourier de $E_{\text{im}}(x', y')$ es el producto de las transformadas de las otras dos funciones $E_{\text{obj}}(X, Y)$ y $H(x', y')$, es decir:

$$\mathcal{E}_{\text{im}}(u', v') = \mathcal{H}(u', v') \mathcal{E}_{\text{obj}}(U, V), \quad (6-15)$$

donde se han introducido las transformadas de Fourier del objeto, de la imagen y de la función de punto extendido, que son respectivamente:

$$\mathcal{E}_{\text{obj}}(U, V) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\text{obj}}(X, Y) e^{i2\pi(UX+VY)} dX dY \quad (6-16)$$

$$\mathcal{E}_{\text{im}}(u', v') = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\text{im}}(x', y') e^{i2\pi(u'x'+v'y')} dx' dy' \quad (6-17)$$

$$\mathcal{H}(u', v') = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x', y') e^{i2\pi(u'x'+v'y')} dx' dy' \quad (6-18)$$

Función de transmisión

siendo (U, V) las frecuencias espaciales usadas para descomponer el plano objeto a lo largo de los ejes X e Y respectivamente, y (u', v') las correspondientes al plano imagen. Obviamente, debido al cambio de escala realizado en (6-11), las frecuencias espaciales del objeto correspondientes a (U, V) vienen dadas por

$$u = \beta' U = \beta' u', \quad v = \beta' V = \beta' v'. \quad (6-19)$$

La transformada de Fourier (6-18), recibe el nombre de *función de transmisión* (“*optical transfer function*”) porque a través de (6-15) determina la proporción de cada frecuencia presente en el objeto que es transmitida por el sistema óptico hasta la imagen. Es decir,

la transición del objeto a la imagen es equivalente a la acción de un *filtro lineal* de frecuencias espaciales. En particular, aquellas frecuencias para las cuales $\mathcal{H}(u', v') = 0$ no pasan a la imagen.

Además, es fácil ver que la función de transmisión, en este caso de iluminación coherente, es igual a la función de pupila. Escribamos la transformada inversa de Fourier de (6-18):

$$H(x', y') = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(u', v') e^{i2\pi(u'x' + v'y')} du' dv'. \quad (6-20)$$

Si ahora comparamos esta integral con la (6-10), observamos que la función de transmisión $\mathcal{H}(u', v')$ no es sino la función de pupila $P(\xi, \eta)$ en la que a las coordenadas (ξ, η) corresponden las frecuencias

$$u' = \frac{\xi}{\lambda R}, \quad v' = \frac{\eta}{\lambda R}; \quad (6-21)$$

es decir,

$$\mathcal{H}\left(\frac{\xi}{\lambda R}, \frac{\eta}{\lambda R}\right) = P(\xi, \eta), \quad (6-22)$$

de modo que el valor de la función de transmisión para las frecuencias (u', v') es igual al valor de la función de pupila en el punto de la abertura de coordenadas $\xi = \lambda R u'$ y $\eta = \lambda R v'$.

6.8.2 Ejemplo: abertura circular

Consideremos el caso sencillo frecuente de la abertura circular de radio a en la que la función pupila $P(\xi, \eta)$ es constante en la abertura $0 < \xi^2 + \eta^2 < a^2$ y nula fuera de ella. Entonces, para los pares de frecuencias tales que:

$$s^2 = u'^2 + v'^2 = \left(\frac{\xi}{\lambda R}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\lambda R}\right)^2 < \left(\frac{a}{\lambda R}\right)^2, \quad (6-23)$$

la función de transmisión es constante y dichas frecuencias son transmitidas a la imagen con igual amplitud. En cambio las frecuencias que no cumplan la condición anterior no pueden pasar a la imagen (véase la Fig. 6-8). Evidentemente este resultado está relacionado con el poder de resolución del instrumento, para el que hemos obtenido las expresiones (4-19) y (6-7) con otros métodos. Para ver esta relación consideremos un

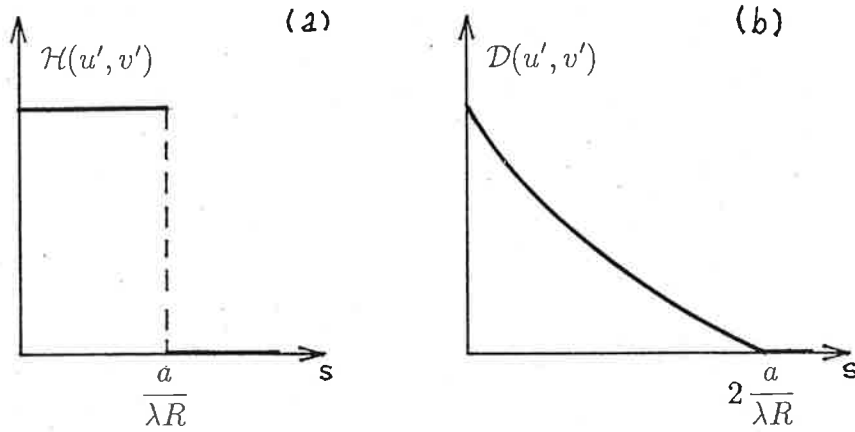


Figura 6-8 Función de transmisión de un instrumento óptico cuya función pupila es constante en la abertura. (a) Caso de iluminación coherente. (b) Caso de iluminación incoherente.

objeto monodimensional cuyas propiedades no varían a lo largo de la dirección X (por ejemplo: una red de difracción sinusoidal paralela a X). Sea ΔY el periodo correspondiente a la frecuencia v' . Entonces, de acuerdo con (6-23), las frecuencias que puede transmitir el instrumento vendrán limitadas por la condición:

$$\Delta Y = \frac{1}{v'} > \frac{\lambda R}{a} \quad (6-24)$$

Ahora bien, si tenemos en cuenta que $\Delta Y = \beta' \Delta y$ (siendo β' el aumento lateral) y $a/R = \text{sen } \theta'$ (siendo θ' la semi-apertura angular en el lado de la imagen), y aplicamos la condición del seno de Abbe:

$$\frac{n \text{ sen } \theta}{n' \text{ sen } \theta'} = \beta', \quad (6-25)$$

la condición (6-24) queda:

$$\Delta y > \frac{\lambda_0}{n \text{ sen } \theta}, \quad (6-26)$$

expresión similar a las citadas (4-19) y (6-7).

6.8.3 Presencia de aberraciones. Iluminación incoherente

Hay dos situaciones también frecuentes en las que las expresiones obtenidas en las secciones anteriores deben ser modificadas: cuando el instrumento óptico no está exento de aberraciones y cuando la iluminación no es coherente. En el primer caso, la función de punto extendido (6-10) no es tan sencilla y debe incluir el efecto de las aberraciones;

como consecuencia, la función de transmisión (6-18) también cambia, empeorando la capacidad de transmitir las frecuencias del objeto.

En el caso de un objeto con emisión o iluminación incoherente, el problema todavía es sencillo: se opera de un modo análogo al caso coherente que se acaba de ver, pero en vez de usar amplitudes hay que usar intensidades. Ahora, al superponerse las diferentes manchas de difracción de Airy, no existe interferencia entre ellas y sólo se suman sus intensidades. La función de transmisión resultante (véase el cálculo en el apéndice 6.9.3) no es constante para todas las frecuencias transmitidas sino que va disminuyendo al aumentar la frecuencia. No obstante, pasan frecuencias más altas que en el caso coherente como se puede observar en la figura 6-8. En el caso de que la iluminación sea parcialmente coherente el tratamiento se complica considerablemente; como se mencionó al principio del capítulo, los libros *Optics* de Klein o *Principles of Optics* de Born y Wolf tratan el caso general de forma detallada.

6.9 Apéndices

6.9.1 Deducción de la fórmula 6-4

6.9.2 Microscopio de contraste de fase de Zernike

Objetos de fase

Otro ejemplo importante de manipulación del plano de Fourier lo constituye el microscopio de contraste de fase desarrollado por Fritz Zernike en 1935 por el que obtuvo el premio Nobel de Física en 1953. Este microscopio está diseñado para la observación de *objetos de fase*, denominados así porque sólo modifican la fase (pero no la amplitud) de la luz que los atraviesa. Dado el factor de transmisión complejo del objeto,

$$t(x, y) = |t(x, y)| e^{i\phi(x, y)}, \quad (6-A1)$$

para que se trate de un objeto de fase se debe cumplir que $|t(x, y)| = 1$ y que $\phi(x, y)$ varíe de unos puntos del objeto a otros. Esto significa que la intensidad de la luz a la salida es la misma que a la entrada y el objeto resulta invisible en el microscopio ordinario. Los objetos visibles con el microscopio ordinario son aquéllos cuyo factor de transmisión al menos produce variaciones de intensidad en la luz transmitida. Estas variaciones de la absorción de unas zonas a otras del objeto se manifiestan en la imagen como contrastes de luz (intensidad o color) que permiten distinguir los detalles del objeto. Por lo general, los objetos ordinarios producen tanto cambios de fase como de amplitud. En el caso en que ϕ es constante pero $t(x, y)$ no lo es, se habla de *objeto de amplitud*.

Ejemplos típicos de objetos de fase son ciertas partes de las células cuando éstas se encuentran en el caldo de cultivo, o los microcristales que se forman en una solución de crecimiento. Una manera de solucionar esta dificultad consiste en teñir los objetos de fase con algún colorante que reacciona de forma diferente con el objeto que con el caldo de cultivo; esto produce diferencias de coloración (de ahí procede el nombre de *cromosomas*) que los transforman en objetos de amplitud y los hacen visibles. Este procedimiento tiene el inconveniente de que afecta al objeto hasta el punto de que los microorganismos mueren y no pueden ser observados en vivo, además de la complicación adicional de la preparación. Con objeto de evitar estas complicaciones, se han ideado diversos procedimientos para observación directa de los objetos de fase que se basan en la manipulación del plano de Fourier. Por ejemplo, en el método llamado del *campo central oscuro* se excluye el orden central del plano de Fourier mediante una mascarilla adecuada, y en el *método de Schlieren* se excluyen todos los órdenes a un lado del central. De todos ellos sin embargo el más poderoso es el ideado por Zernike porque produce cambios de intensidad en la imagen que son proporcionales a los cambios de fase del objeto.

La difracción en el objeto de fase

La idea central del método de Zernike consiste en introducir un cambio de fase en la luz que no pasa por el objeto y hacerla interferir con la que sí pasa por el objeto; esta interferencia convierte en visibles los cambios de fase debidos al objeto. Para describir el método de Zernike consideremos un pequeño objeto de fase O de espesor h iluminado de

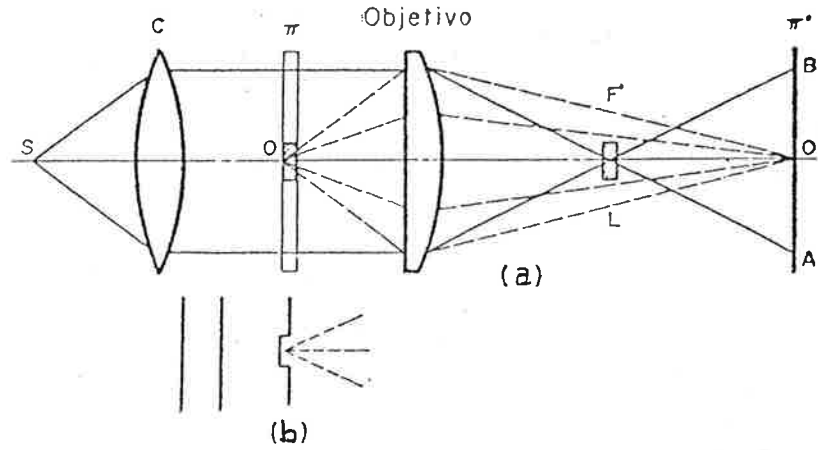


Figura 6-A1 (a) Esquema del método de contraste de fase de Zernike. (b) Frente de onda procedente del condensador antes y después de atravesar la preparación.

forma coherente (por una onda monocromática y plana), como se indica en la figura 6-A1a. Supongamos que la amplitud de la onda plana incidente viene dada por:

$$E_i = E_0 e^{i\phi_i} \quad (6-A2)$$

(en la Fig. 6-A1b se ha representado el frente de onda antes y después de atravesar la preparación). Después de atravesar el objeto y debido a que su índice de refracción, $n_{ob}(x, y)$, es ligeramente diferente del índice de la preparación, n_{pr} , el frente de onda presenta un pequeño salto de fase en la zona del objeto dado por:

$$\delta(x, y) = \frac{2\pi}{\lambda_0} h [n_{ob}(x, y) - n_{pr}] . \quad (6-A3)$$

Esta pequeña perturbación del frente de onda genera un débil haz difractado que diverge a partir del objeto, de modo que la luz que sale de éste, $E_{ob}(x, y)$, se puede considerar compuesta de dos partes: la misma onda plana incidente E_i que existe cuando el objeto no está presente, y la pequeña fracción difractada $E_{dif}(x, y)$ que emerge divergente. Para ver que esto es así, escribamos la expresión de $E_{ob}(x, y)$:

$$E_{ob}(x, y) = E_i e^{i\delta(x, y)} \simeq E_0 e^{i[\phi_i + \delta(x, y)]} . \quad (6-A4)$$

Teniendo en cuenta que $\delta \ll 1$, se puede usar $e^{i\delta} \simeq 1 + i\delta$ y la expresión anterior queda,

$$E_{ob}(x, y) \simeq E_i + i\delta(x, y) E_i = E_i + \delta(x, y) E_i e^{i\pi/2} . \quad (6-A5)$$

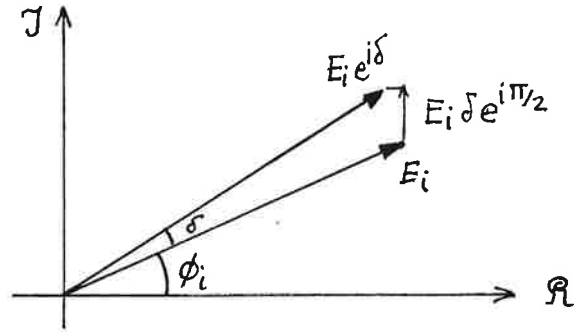


Figura 6-A2 Representación en el plano complejo de las amplitudes $E_i = E_0 e^{i\phi_i}$ y $E_{ob} = E_i e^{i\delta}$; ésta última se puede descomponer en la suma de E_i y $E_i \delta e^{i\pi/2}$.

Es decir, equivale a la incidente más una onda de pequeña amplitud δE_i y desfasada en $\pi/2$ respecto a la incidente, que lleva la información sobre el objeto. Para ilustrar gráficamente esta descomposición, en la figura 6-A2 se han representado las amplitudes de estas ondas en el plano complejo y la descomposición usada de E_{ob} .

En el proceso de formación de la imagen, la onda plana (6-A2) es focalizada por el objetivo en su foco imagen F' (línea continua en la Fig. 6-A1a), y da lugar a una onda esférica que se propaga hacia el plano Π' . Dada la lejanía de este plano (típicamente en el microscopio es ~ 160 mm) en relación a la distancia focal del objetivo ($f' \lesssim 1$ mm), esta onda esférica se puede considerar aproximadamente plana en la pequeña región alrededor de O' en que se forma la imagen ($y' \lesssim 0,1$ mm). Esta onda, por tanto, produce una iluminación homogénea de fondo. Por su parte la onda difractada que diverge desde el objeto O (línea de trazos en la Fig. 6-A1a), produce en el plano focal o plano de Fourier una distribución de luz bastante extendida y abigarrada (dependiendo del tipo de objeto). En la región O' , la superposición de esta luz con la iluminación homogénea del fondo da lugar a una imagen proporcional a (6-A4), es decir:

$$E'_{im}(x', y') = cte E_i e^{i\delta(x,y)} . \quad (6-A6)$$

Como esta imagen sólo difiere del fondo E'_i en la fase $\delta(x, y)$, su intensidad $I'_{im}(x, y) \propto |E_i e^{i\delta(x,y)}|^2 = |E_0|^2$ es igual a la del fondo y resulta invisible. Es conveniente poner de manifiesto explícitamente las dos contribuciones (fondo homogéneo y luz difractada) escribiendo la expresión anterior en la forma de la (6-A5),

$$E'_{im}(x', y') \simeq cte [E_i + E_i \delta(x, y) e^{i\pi/2}] . \quad (6-A7)$$

La lámina de fase

El método de contraste de fase de Zernike consiste en introducir un cambio de fase de $\pm\pi/2$ en la luz del fondo E_i (primer término de la (6-A7)). Esto se consigue colocando una *lámina de fase* de espesor óptico $\lambda/4$ o $3\lambda/4$ en el foco F' del objetivo; por él pasa toda la luz que ilumina el fondo del plano Π' , y una fracción pequeña de la luz que forma la imagen O' . Así mismo, la lámina suele ser parcialmente absorbente de modo que se reduzca parte de la luz del fondo, y su factor de transmisión vendrá dado por $t e^{\pm i\pi/2}$ siendo $0 < t < 1$ el módulo del mismo. Entonces la amplitud (6-A7) queda del siguiente modo:

$$[E'_{\text{im}}(x', y')]_{\text{if}} = cte [t e^{\pm i\pi/2} E_i + \delta(x, y) e^{i\pi/2} E_i] = cte i E_i [\pm t + \delta(x, y)] \quad (6-A8)$$

y de esta última se obtiene la intensidad en el plano imagen,

$$[I'_{\text{im}}(x', y')]_{\text{if}} \propto |[E'_{\text{im}}]_{\text{if}}|^2 \propto [t \pm 2\delta(x, y)]. \quad (6-A9)$$

Se observa que la intensidad $[I'_{\text{im}}(x', y')]_{\text{if}}$ presenta una modulación proporcional a los cambios de fase $\delta(x, y)$ del objeto. Para un cambio de fase de $+\pi/2$, los detalles del objeto aparecen más iluminados que el fondo (contraste positivo); para un cambio de $-\pi/2$, aparecen más oscuros (contraste negativo). El efecto del cambio de fase debido al objeto (término 2δ en la expresión anterior) se puede aumentar usando un factor de transmisión t pequeño; de este modo se mejora el contraste de la imagen.

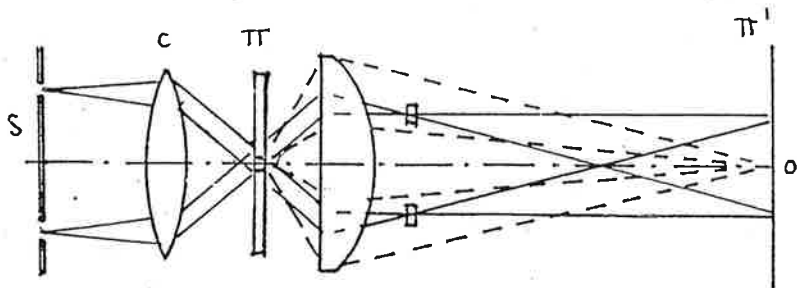


Figura 6-A3 Uso de una fuente luminosa y una lámina de fase anulares en el microscopio de contraste de fase de Zernike.

Otra mejora del método consiste en utilizar una fuente de luz con forma de anillo como se ilustra en la figura 6-A3. En este caso se utiliza un *anillo de fase* que presenta dos ventajas: la zona central de la luz difractada (que lleva más energía) no atraviesa el anillo de fase, y al mismo tiempo se reduce la oblicuidad de la luz de fondo al incidir sobre el anillo, con lo que el desfase introducido es más homogéneo para los rayos. En cualquier caso, el poder de resolución del microscopio es esencialmente el mismo que en el caso ordinario.

6.9.3 Función de transmisión con iluminación incoherente